Второй тур

6 класс

29. На экране кривого калькулятора написано число 20. Время от времени калькулятор умножает число на экране на 2 и тут же вычитает из результата какое-нибудь число от 1 до 10. Может ли на экране получиться число 2016? (*К. Сухов*)

30. Числа 1, 2, 3, …, 200 расставлены вдоль окружности в некотором порядке. Для каждого числа n среди 99 чисел, стоящих после него по часовой стрелке, и среди 99 чисел, стоящих до него, имеется поровну чисел, меньших n. Найдите, какое число стоит напротив числа 111. (*А. Голованов*)

31. Натуральное число можно представить как сумму 18 его делителей (не обязательно различных) и как сумму 19 его делителей (не обязательно различных). Докажите, что это число можно представить и как сумму 20 его делителей (не обязательно различных). (*В. Франк*)

32. На полке в камере хранения стоят 10 чемоданов, занумерованных в некотором порядке числами от 1 до 10. Чемоданы имеют разную ширину и стоят не обязательно вплотную друг к другу и к краям полки. Кладовщик снимает с полки чемодан №1, а затем ставит его обратно на полку в самое левое из возможных положений, не сдвигая другие чемоданы. Затем он берет чемодан №2 и ставит его в самое левое положение и т. д. После перестановки чемодана №10 кладовщик снова переходит

к чемодану №1 и т. д. Докажите, что после 100 операций кладовщик будет ставить каждый чемодан на то место, откуда его только что взял. (Если очередной чемодан пришлось поставить на место, откуда его взяли, это все равно засчитывается как выполненная операция). (*А. Храбров*)

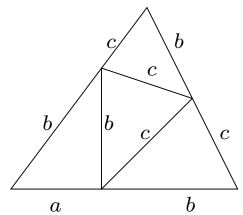
33. На острове Невезения мужчины по средам всегда говорят правду, а по четвергам всегда лгут, а женщины — наоборот. В среду каждый из них сказал: “У меня знакомых мужчин на 1 больше, чем знакомых женщин”, а в четверг — “Среди незнакомых мне жителей острова мужчин на 1 больше, чем женщин”. Могло ли на острове быть ровно 2015 жителей? (*А. Солынин*)

34. Клетчатый квадрат 60×60 разбит на плиточки 2×5. Докажите, что можно задать такое разбиение квадрата на прямоугольники 1×3, что каждая плиточка 2×5 будет содержать целиком хотя бы один прямоугольник. (*О. Иванова*)

7 класс

35. На экране своенравного калькулятора написано двузначное число. Калькулятор может умножить число на экране на 2 и вычесть из результата какое-нибудь натуральное число от 1 до 10 (при следующей операции он может вычесть другое число от 1 до 10). Известно, что такими операциями калькулятор может из исходного числа получить 2015. Докажите, что он может получить и 2016. (*К. Сухов*)

36. На сторонах треугольника отметили по точке и соединили их так, как показано на рисунке. При этом образовались равные отрезки. Докажите, что $a = c$. (*К. Кохась*)



37. См. задачу 33.

38. Доска 8×8 красится в два цвета. Раскраска называется *ладейной*, если ладья может пройти от верхней стороны доски до нижней по белым клеткам, переходя каждым шагом с клетки на соседнюю по стороне клетку. Докажите, что количество ладейных раскрасок меньше половины общего числа раскрасок. (*фольклор*)

39. На доске написано несколько степеней четверки (не обязательно различных). Андрей задумал еще одну степень четверки, которая больше каждого числа, написанного на доске, но не превосходит их суммы. Докажите, что Андрей может подчеркнуть несколько чисел на доске так, чтобы их сумма равнялась задуманному числу. (*А. Храбров в обработке К. Сухова*)

40. В остроугольном треугольнике провели три высоты. Докажите, что из получившихся шести отрезков (трёх сторон и трёх высот) можно составить два треугольника. (*С. Берлов*)

41. На плацу нарисован квадрат 9×9, в каждой клетке стоит по солдату. Демократичный старшина за один ход указывает на двух солдат, стоящих в соседних по стороне клетках, и один из них (на выбор солдат) уходит чистить картошку. Как только оказывается, что у кого-то из стоящих солдат ушли два соседа по стороне, процесс прекращается. Какое наибольшее количество солдат старшина может отправить на чистку картошки, независимо от действий солдат? (*А. Солынин, А. Кузнецов*)

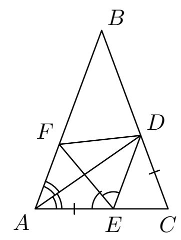
8 класс

42. На острове Невезения мужчины по средам всегда говорят правду, а по четвергам всегда лгут, а женщины – наоборот. В среду каждый из них сказал: “У меня знакомых мужчин на 1 больше, чем знакомых женщин”, а в четверг — “У меня знакомых женщин на 1 больше, чем мужчин”. Могло ли на острове быть ровно 2015 жителей? (*А. Солынин*)

43. Даны числа $x, y \geqslant 0$. Докажите, что

$$x^2 + xy + y^2 \leqslant 3(x - \sqrt{xy} + y)^2.$$

(*А. Храбров*)

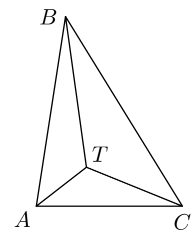


44. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведена биссектриса AD. На основании AC отмечена точка E, такая что $AE = DC$. Биссектриса угла AED пересекает сторону AB в точке F. Докажите, что $\angle AFE = \angle DFE$. (*А. Кузнецов, А. Пастор*)

45. См. задачу 34.

46. Вася выписал в строку 100 последовательных чисел. Во второй строке под каждым числом он написал его собственный делитель. В третьей строке он под каждым числом из второй строки написал его собственный делитель и т.д., пока не получилось 1000 строк. Могло ли так быть, что в каждой строке написаны последовательные числа? (*В. Франк*)

47. На полке в камере хранения стоят 13 чемоданов, занумерованных в некотором порядке числами от 1 до 13. Чемоданы имеют разную ширину и стоят не обязательно вплотную друг к другу и к краям полки. Кладовщик вынимает с полки чемодан №1 и ставит его в самое левое из возможных положений, не сдвигая другие чемоданы. Затем он берет чемодан №2 и ставит его в самое левое положение, не сдвигая другие и т. д. После перестановки чемодана №13 кладовщик снова переходит к чемодану №1 и т. д. Найдите наименьшее натуральное n такое, что для любой начальной расстановки чемоданов после n операций каждый чемодан кладовщик заведомо будет ставить на то место, откуда его взял. (Если чемодан ставят на место, откуда его взяли, это все равно засчитывается как выполненная операция). (*А. Храбров*)



48. Внутри треугольника ABC отмечена точка T, из которой все стороны видны под углом 120°. Докажите, что

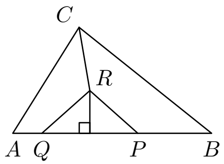
$$2AB + 2BC + 2CA \geqslant 4AT + 3BT + 2CT.$$

(*А. Кузнецов*)

9 класс

49. Даны три квадратных трехчлена f, g, h, не имеющие корней. Их старшие коэффициенты одинаковы, а все их коэффициенты при x различны. Докажите, что существует такое число c, что уравнения $f(x) + cg(x) = 0$ и $f(x) + ch(x) = 0$ имеют общий корень. (*А. Храбров*)

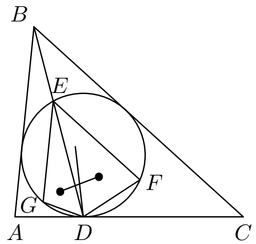
50. На доске 300×300 расставлено несколько ладей, которые бьют всю доску. При этом каждая ладья бьёт не более чем одну другую ладью. При каком наименьшем k можно заведомо утверждать, что в каждом квадрате $k \times k$ стоит хотя бы одна ладья? (*С. Берлов*)



51. На стороне AB неравнобедренного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AC = AP$ и $BC = BQ$. Серединный перпендикуляр к отрезку PQ пересекает биссектрису угла C в точке R (внутри треугольника). Докажите, что $\angle ACB + \angle PRQ = 180°$. (*А. Кузнецов*)

52. Два различных простых числа p и q отличаются менее чем в два раза. Докажите, что существуют такие два последовательных натуральных числа, что у одного из них наибольший простой делитель равен p, а у другого — q. (*А. Голованов*)

53. Костя и Сергей играют в игру на белой полоске длины 2016. Костя (он ходит первым) за один ход должен закрасить черным две соседних белых клетки. Сергей своим ходом должен закрасить либо одну белую клетку, либо три соседних белых клетки. Запрещается делать ход, после которого образуется белая клетка, не имеющая белых соседей. Проигрывает не имеющий хода. Однако, если все клетки закрашены, то выигрывает Костя. Кто выиграет при правильной игре? (*К. Тыщук*)



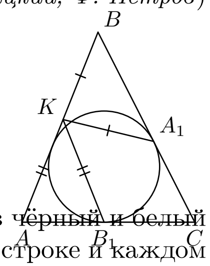
54. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается стороны AC в точке D. Отрезок BD повторно пересекает окружность в точке E. Точки F и G на окружности таковы, что $FE \parallel BC$ и $GE \parallel BA$. Докажите, что отрезок, соединяющий центры вписанных окружностей треугольников DEF и DEG, делится пополам биссектрисой угла GDF. (*Ф. Бахарев*)

55. Блок из N подряд идущих натуральных чисел называется хорошим, если произведение каких-то двух из них делится на сумму остальных. Для каких N существует бесконечно много хороших блоков? (*С. Берлов*)

10 класс

56. Саша перемножил все делители натурального числа n. Федя увеличил каждый делитель на 1, а потом перемножил результаты. Федино произведение нацело делится на Сашино. Чему может быть равно n? (*Ф. Петров*)

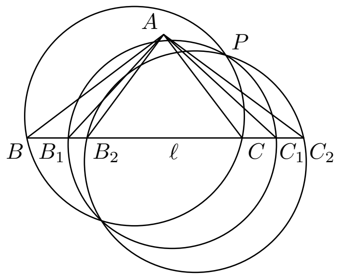
57. Даны положительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, такие что $x_i \leqslant 2x_j$ при $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Докажите, что найдутся такие положительные числа $y_1 \leqslant y_2 \leqslant \ldots \leqslant y_n$, что $x_k \leqslant y_k \leqslant 2x_k$ при всех $k = 1, 2, \ldots, n$. (*П. Затицкий, Ф. Петров*)



58. Вписанная в треугольник ABC окружность касается стороны AC в точке B_1, а стороны BC в точке A_1. На стороне AB нашлась такая точка K, что $AK = KB_1$, $BK = KA_1$. Докажите, что $\angle ACB \geqslant 60°$.

59. Раскраска клеток таблицы 100×100 в чёрный и белый цвета называется *допустимой*, если в каждой строке и каждом столбце от 50 до 60 чёрных клеток. Разрешается изменить цвет одной из клеток допустимой раскраски, если она остаётся допустимой. Докажите, что такими операциями можно получить из любой допустимой раскраски любую другую. (*О. Иванова*)

60. Точки A и P лежат вне прямой ℓ. Рассматриваются всевозможные прямоугольные треугольники ABC с гипотенузой, лежащей на ℓ. Докажите, что окружности, описанные около треугольников PBC, имеют общую точку, отличную от P.



(*Ф. Бахарев*)

61. В окружность вписана замкнутая 100-звенная ломаная, никакие три звена которой не проходят через одну точку. Все ее углы тупые, и их сумма в градусах делится на 720. Докажите, что у этой ломаной нечетное число точек самопересечения.

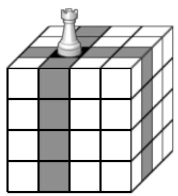
(*С. Иванов*)

62. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами и натуральное число $a > 1$ таковы, что для любого целого x найдётся целое z, для которого $aP(x) = P(z)$. Найдите все такие пары $(P(x), a)$. (*А. Голованов*)

11 класс

63. В последовательности целых чисел (a_n) сумма $a_m + a_n$ делится на $m + n$ при любых различных m и n. Докажите, что a_n кратно n при любом n. (*О. Иванова*)

64. Ладья, стоящая на поверхности клетчатого куба, бьёт клетки, находящиеся с той клеткой, где она стоит, в одном ряду, а также на продолжениях этого ряда через одно или даже несколько ребёр. (На картинке показан пример для куба $4 \times 4 \times 4$; видимые клетки, которые бьёт ладья, закрашены серым.)



Какое наибольшее количество не бьющих друг друга ладей можно расставить на поверхности куба $50 \times 50 \times 50$?

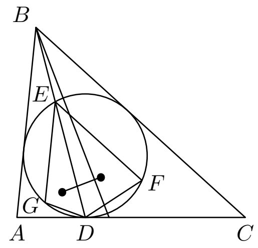
(*А. Чухнов*)

65. В тетраэдре середины всех ребер лежат на одной сфере. Докажите, что его высоты пересекаются в одной точке.

(*Д. Максимов*)

66. По окружности движутся $n > 4$ точек, каждая — с постоянной скоростью. Для любых четырех из них есть момент времени, когда они все встречаются. Докажите, что есть момент, когда все точки встречаются. (*С. Иванов*)

67. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается стороны AC в точке D. Отрезок BD повторно пересекает окружность в точке E. Точки F и G на окружности таковы, что $FE \parallel BC$ и $GE \parallel BA$. Докажите, что прямая, соединяющая центры вписанных окружностей треугольников DEF и DEG, перпендикулярна биссектрисе угла B.



(*Ф. Бахарев*)

68. В стране 50 городов, каждые два города соединены (двусторонними) авиалиниями, цены всех перелетов попарно различны (для любой пары городов цена перелета «туда» равна цене «обратно»). В каждом городе находится турист. Каждый вечер все туристы переезжают: богатые туристы — по самой дорогой, бедные — по самой дешевой линии, ведущей из соответствующего города. Через k дней оказалось, что в каждом городе снова по одному туристу. За это время ни один турист не посетил никакой город дважды. При каком наибольшем k такое возможно? (*К. Кохась*)

69. Для многочлена $P(x)$ с вещественными коэффициентами можно указать вещественное число $a > 1$ такое, что при каждом целом x существует целое z, для которого $aP(x) = P(z)$. Найдите все такие многочлены $P(x)$. (*А. Голованов*)