# Второй тур

## *6 класс*

**29.** Про натуральное число $n$ известно, что НОД$(1000, n) = 4$ и НОД$(1000, n + 1) = 5$. Чему равен НОД$(1000, n + 2)$?
(*Д. Максимов*)

**30.** В магазине проходит акция «*Каждый третий товар — бесплатно*». При печати чека покупки выстраиваются по убыванию цены, и все товары с номерами, кратными трем, выдаются бесплатно. Петя и Маша выбрали товаров в сумме на 30 000 рублей и оплатили их двумя чеками. Благодаря акции каждый из них сэкономил по 1000 руб. Какое максимальное количество денег могли бы они сэкономить, если бы оплачивали покупки сообща одним чеком? (*А. Солынин*)

**31.** На клетчатой плоскости отмечено несколько клеток. На каждой клетке плоскости написано, за какое наименьшее число ходов шахматный конь может дойти от этой клетки до какой-нибудь отмеченной. Андрей вырезал из плоскости полоску $5 \times 1$, не содержащую отмеченных клеток. Докажите, что в клетках этой полоски есть два равных числа. (*А. Солынин*)

**32.** На доске написано 88 различных натуральных чисел, больших 1000. Их сумма равна 999 999. Сережа прибавил к каждому числу число, образованное его тремя последними цифрами. (Например, из числа 1111 получилось бы 1222, из числа 1011 — число 1022, а из числа 10 000 — оно само.) Все 88 результатов Сережа записал в тетрадь. Докажите, что в тетради записано хотя бы 45 различных чисел. (*С. Берлов*)

**33.** Компания из 99 Кощеев Бессмертных гуляет по прямой дороге. Они все вместе идут с постоянной скоростью, а направление движения (вперед или назад) раз в час выбирают большинством голосов. В момент выхода Кощеи единогласно решили идти вперед. Первый Кощей меняет мнение о том, куда он хочет идти, каждый час; второй Кощей — каждые два часа; третий — каждые три, и т. д. Докажите, что в какой-то момент они вернутся в начало маршрута. (*О. Иванова*)

**34.** В классе учится 30 учеников, один из них — Вася. Каждый из Васиных одноклассников имеет ровно 5 общих друзей с Васей. Докажите, что в классе есть ученик с нечетным числом друзей. (*С. Берлов*)

## *7 класс*

**35.** На доске написано 2015 чисел (не обязательно различных). Для каждого из этих чисел подсчитали, сколько чисел на доске меньше него, и сколько чисел на доске больше него. Может ли так оказаться, что для каждого числа на доске эти два количества имеют разную четность? (*К. Сухов*)

**36.** На клетчатой плоскости отмечено несколько клеток. На каждой клетке плоскости написано, за какое *наименьшее* число ходов шахматный конь может дойти от этой клетки до какой-нибудь отмеченной. Андрей вырезал из плоскости прямоугольник $2 \times 3$, не содержащий отмеченных клеток. Докажите, что в клетках этого прямоугольника не более четырёх различных чисел. (*А. Солынин*)

**37.** В турнире участвовало 98 шахматистов. Для игры в очередном туре их как-нибудь разбивают на пары. Проигравший в паре выбывает из турнира, а если была ничья, оба игрока проходят в следующий тур. В случае, когда количество участников тура нечётно, один из шахматистов «отдыхает» и проходит в следующий тур без игры. Оказалось, что единоличный победитель определился после семи туров. Какое наибольшее количество «отдыхавших» могло быть? (*А. Солынин*)

**38.** См. задачу 32.

**39.** Дан треугольник $ABC$, в котором $BC = 2AB$. Точка $D$ — середина стороны $BC$, точка $K$ — середина отрезка $BD$. Докажите, что $AC = 2AK$. (*С. Берлов*)

**40.** Гриша вычислил произведение всех чисел, не превосходящих миллиона и не кратных 29, и сократил его на максимальную возможную степень числа 31. Стас нашёл произведение всех чисел, не превосходящих миллиона и не кратных 31,



и сократил его на максимальную возможную степень числа 29. Чей результат больше? (*А. Голованов*)

**41.** На доске $2015 \times 2015$ стоят 1800 фигур – ладей и ферзей. Они бьют все незанятые клетки доски. (Фигура бьет все клетки, до которых может дойти по шахматным правилам, не проходя сквозь другие фигуры.) Докажите, что ферзей не меньше 214. (*А. Солынин*)

## *8 класс*

**42.** Целые ненулевые числа $a$, $b$, $c$, $d$ таковы, что

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{b}{c} + \frac{d}{a},$$

причем эти четыре дроби несократимы, не являются целыми числами и не обязательно положительны. Найдите $ad + bc$. (*А. Чухнов*)

**43.** В трапеции $ABCD$ точка $F$ — середина боковой стороны $BC$, точка $K$ на другой боковой стороне $AD$ является основанием перпендикуляра, опущенного из точки $F$. Оказалось, что $3AK \leqslant KD$. Докажите, что $AB + CD \geqslant 2AF$. (*С. Берлов*)

**44.** Шахматная фигура *кенгуру* бьёт 8 клеток, которые расположены от неё на две или три клетки левее, правее, выше или ниже (а соседние клетки не бьет). Какое наибольшее число не бьющих друг друга кенгуру можно расставить на доске $8 \times 8$? (*А. Чухнов*)

**45.** У каждого из 30 различных натуральных чисел предпоследняя цифра больше 5. Все эти числа поделили с остатком на 99 и полученные неполные частные и остатки выписали на доску. Докажите, что среди 60 выписанных чисел не менее 9 различных. (*М. Антипов*)

**46.** Даны положительные числа $a_1 < a_2 < \ldots < a_{2015}$. Оказалось, что $a_k$ в пять раз больше среднего арифметического всех чисел. Какое наименьшее значение может принимать $k$? (*Д. Максимов*)

**47.** В треугольнике $ABC$ проведена биссектриса $BL$. Известно, что $\angle B = 2\angle C$. На стороне $BC$ отмечена точка $D$, такая что $AB = CD$. Прямые $AD$ и $BL$ пересекаются в точке $T$. Докажите, что площади треугольников $ALD$ и $CLT$ равны.

(*С. Берлов*)

**48.** Каждый член клуба веселых дальтоников знаком не более чем с 10 другими. Клуб закупил тапочки 23 различных цветов (тапок каждого цвета бесконечно много). На новогодний фуршет члены клуба прибывали по одному, и каждый, входя, обнаруживал, что те из уже пришедших, с кем он знаком, между собой тоже знакомы. Докажите, что после боя курантов каждому члену клуба можно подарить тапочки разного цвета так, что у любых двух знакомых членов клуба окажутся тапочки четырех различных цветов, а у любых двоих, имеющих общего знакомого, — тапочки не менее трех разных цветов.

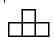
(*К. Кохась*)

## *9 класс*

**49.** Существует ли такой квадратный трехчлен $f(x)$ с целыми коэффициентами, что $f(f(\sqrt{2})) = 0$? (*А. Храбров*)

**50.** Дана равнобедренная трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$). Известно, что $AD > BC$. На ее описанной окружности отмечена точка $E$, такая, что $BE \perp AD$. Докажите, что $AE + BC > DE$.

(*А. Пастор*)

**51.** Клетки квадрата $2015 \times 2015$ раскрашены в 4 цвета. Рассматриваются все способы размещения внутри этого квадрата четырехклеточной фигурки вида  (фигурку можно поворачивать). Докажите, что фигурка содержит клетки четырех разных цветов менее чем в 51 % из этих способов. (*Д. Карпов*)

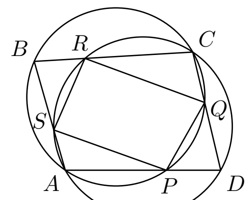
**52.** Положительные числа $x, y, z$ удовлетворяют условию

$$xy + yz + zx + 2xyz = 1.$$



Докажите, что $4x + y + z \geqslant 2$. (*А. Храбров*)

**53.** Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Описанная окружность треугольника $ABC$ пересекает стороны $AD$ и $DC$ в точках $P$ и $Q$ соответственно. Описанная окружность треугольника $ADC$ пересекает стороны $AB$ и $BC$ в точках $S$ и $R$ соответственно. Оказалось, что четырехугольник $PQRS$ — параллелограмм. Докажите, что и четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм. (*С. Берлов*)




**54.** В межгалактической империи $10^{2015}$ планет, любые две из которых соединены двусторонней прямой космической линией. Этими линиями владеют 2015 транспортных компаний. Император хочет закрыть $k$ компаний так, чтобы, пользуясь только рейсами оставшихся, можно было бы с любой планеты добраться до любой другой. При каком наибольшем $k$ он гарантированно сможет осуществить свой план? (*Д. Карпов*)

**55.** Последовательность натуральных чисел определена следующим образом: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_n$ — наименьшее натуральное число, не встречавшееся раньше, взаимно простое с $a_{n-1}$ и не взаимно простое с $a_{n-2}$. Докажите, что в этой последовательности встречаются ровно по одному разу все натуральные числа. (*М. Иванов*)

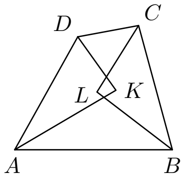
## *10 класс*

**56.** Не менее половины всех палат в лагере — четырёхместные, остальные — трёхместные. Не менее двух третей всех девочек в лагере живут в трёхместных палатах. Докажите, что более 35 % личного состава составляют мальчики. (Все палаты заполнены, мальчики и девочки в одной палате не живут.)

(*А. Солынин*)

**57.** Шахматная фигура бобёр ходит на две клетки по вертикали или по горизонтали в любом направлении. В какое наименьшее число цветов можно раскрасить доску $100 \times 100$ так, чтобы любые две клетки, отстоящие на ход коня или на ход бобра, были разного цвета? (*А. Голованов*)

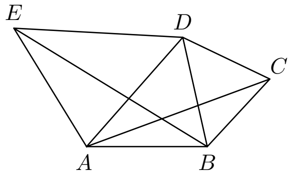
**58.** Биссектрисы углов $A$ и $D$ выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке $K$; биссектрисы углов $B$ и $C$ — в точке $L$. Докажите, что $2KL \geqslant |AB - BC + CD - DA|$. (*А. Смирнов, Ф. Петров*)




**59.** Назовем натуральное число $n$ олимпиадным, если найдется такой квадратный трехчлен $f(x)$ с целыми коэффициентами, что $f\bigl(f(\sqrt{n})\bigr) = 0$. Найдите наибольшее олимпиадное число, не превосходящее 2015. (*А. Храбров*)

**60.** В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ выполнены равенства углов $\angle BCA = \angle BEA = \frac{1}{2}\angle BDA$, $\angle BDC = \angle EDA$. Докажите, что $\angle DEB = \angle DAC$.

(*Ф. Петров по мотивам задачи 69*)




**61.** См. задачу 55.

**62.** В выпуклом $n$-угольнике провели все стороны, а также все диагонали из одной вершины. На полученных $2n - 3$ отрезках написали положительные числа. Разрешается взять четырехугольник $ABCD$ такой, что все его стороны и диагональ $AC$ — проведенные отрезки, стереть диагональ $AC$, провести диагональ $BD$ и написать на ней число $(xz + yt)/w$, где $x$, $y$, $z$, $t$, $w$ — числа на отрезках $AB$, $BC$, $CD$, $DA$, $AC$ соответственно. Докажите, что если в какой-то момент проведенными окажутся те же $2n - 3$ отрезка, что в начале, то на них будут написаны те же числа, что и в начале. (*фольклор*)

## *11 класс*

**63.** Числа $x$ и $y$ удовлетворяют условиям $20x^3 - 15x = 3$ и $x^2 + y^2 = 1$. Найдите $|20y^3 - 15y|$. (*К. Тыщук*)



**64.** Натуральные числа $a$ и $b$ больше 1. Известно, что числа $a^2+b$ и $a+b^2$ простые. Докажите, что числа $ab+1$ и $a+b$ взаимно простые. (*С. Берлов*)

**65.** Набор разновесов содержит по одной гире каждого из весов 1, 3, 5, 7, 9, ... граммов. Для натурального $n > 1$ докажите, что количество способов набрать этими гирями $n$ граммов не больше, чем количество способов набрать $n + 1$ грамм. (*Ф. Петров*)

**66.** См. задачу 53.

**67.** Бумажный квадрат со стороной 100 разрезали 99 вертикальными и 99 горизонтальными прямыми, получив таким образом 10 000 прямоугольников (необязательно с целыми сторонами). У какого наименьшего количества прямоугольников площадь может оказаться меньшей или равной 1? (*Н. Филонов*)

**68.** В стране Центумии некоторые пары городов соединены дорогами, причем из каждого города выходит ровно 100 дорог. *Пучком* называется набор из 10 дорог, выходящих из одного города. Докажите, что все дороги можно разбить на несколько пучков. (*С. Берлов*)

**69.** На биссектрисе $BL$ остроугольного треугольника $ABC$ выбрали такую точку $K$, что $\angle AKC - \angle ABC = 90°$. На продолжении биссектрисы $BL$ за точку $L$ выбрали такую точку $S$, что $\angle ASC = 90°$. Точка $T$ диаметрально противоположна точке $K$ на описанной окружности треугольника $AKC$. Докажите, что прямая $ST$ проходит через середину дуги $ABC$. (*С. Берлов*)