

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

Первый тур

6 класс

1. В гильдии ювелиров есть два кольца по цене 10 и 30 гулденов и 4 драгоценных камня по цене 60, 70, 80 и 90 гулденов. В гильдии можно заказать изготовление перстня Мудрости, для этого требуется кольцо и два драгоценных камня. Цена такого заказа равна произведению цен требуемых компонентов. У послушника Васи есть всего 200 000 гулденов. Сможет ли он заказать себе два перстня? (А. Храбров, К. Сухов, К. Кохась)

2. В сидячем вагоне поезда стоят трехместные скамейки для пассажиров: 20 рядов по 2 скамейки. Костя заметил, что на каждом ряду сидит 3 или 5 человек. Потом Костя подсчитал, на скольких скамейках сидит 3 человека и на скольких — один человек. Найдите сумму Костиных чисел. (К. Кохась)

3. На межпланетный фестиваль «Радуга» прибыли 107 зелёных и фиолетовых человечков. Зелёные человечки правильно воспринимают цвета, а фиолетовым, к сожалению, зелёный кажется фиолетовым, и наоборот. Посмотрев вокруг, каждый участник фестиваля подошёл к кому-то, сказал «Какой вы фиолетовый!» и подарил кактус. Докажите, что хотя бы один человек на фестивале не получил такого подарка. (А. Чухнов)



4. Антиподом натурального числа называется число, записанное теми же цифрами в обратном порядке. Федя взял пятизначное число, в записи которого нет нулей и все цифры различны, причем первая цифра больше пятой. Далее Федя вычел из этого числа его антипод; результат оказался пятизначным числом. Этот результат Федя сложил с его антиподом. Какие ответы могли получиться у Феди? Найдите все варианты и докажите, что других нет. (Ф. Базарев)

7 класс

5. См. задачу 2.

6. На новогодний праздник пришло 99 мстительных детей. В гардеробе каждый из них обругал кого-то из остальных, причем никто не был обруган дважды. Когда Дед Мороз предложил всем загадать по два желания, первым желанием каждого ребенка было получить огромное мороженое, а вторым — чтобы его обидчик не получил мороженое. Докажите, что у кого-то из детей сбудется ровно одно из загаданных желаний.



(А. Солянин)

Сбудется

Не сбудется

7. Можно ли прямоугольник разрезать на три прямоугольника A , B , C так, чтобы у A был самый большой периметр, у B самая большая площадь, а у C самая большая диагональ? Не забудьте обосновать ответ. (К. Кохась)

8. На извилистой реке расположены три города A , B и C (не обязательно именно в таком порядке и не обязательно в одном часовом поясе). Между городами ходят катера, скорость катера в 6 раз больше скорости реки. Ниже приведен фрагмент расписания, время везде указано местное, каждое путешествие укладывается в один день.

Маршрут	Отправление	Прибытие
Из C в B	7:00	15:00
Из A в C	7:00	20:00
Из B в A	7:00	22:00

Таня, находясь в самом верхнем (по течению реки) из трёх городов, уронила мячик. Через какое время его увидят жители самого нижнего города, если мячу не мешать плыть по течению? (А. Солянин)

8 класс

9. См. задачу 2.

10. Какие простые числа можно представить в виде

$$|n-1| + |n-2| + |n-3| + |n-4| + |n-5|$$

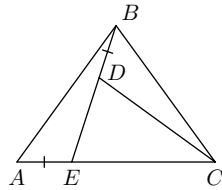
при целых n ? (А. Храбров, В. Франк, Д. Ростовский)

11. На межпланетный фестиваль «Радуга» прибыло 107 зелёных и фиолетовых человечков. Зелёные человечки правильно воспринимают цвета, а фиолетовым, к сожалению, зелёный кажется фиолетовым, и наоборот. Посмотрев вокруг, каждый участник фестиваля подошёл к кому-то, сказал «Какой вы фиолетовый!» и подарил кактус. Какое наименьшее количество человечков могло не получить ни одного кактуса? (А. Чухнов)

12. См. задачу 8.

13. На стороне AC треугольника ABC выбрана точка E , а на отрезке BE — точка D . Известно, что $CE = CD = BE$, $BD = AE$. Докажите, что $\angle B > 60^\circ$.

(А. Смирнов)

**9 класс**

14. См. задачу 2.

15. Даны 100 различных натуральных чисел. Они разбиты на 50 пар так, что сумма в каждой паре больше 1000. Докажите, что если выписать все 100 чисел в порядке возрастания, то сумма 40-го и 61-го чисел тоже больше 1000.

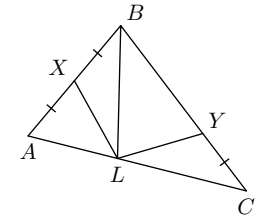
(С. Берлов, А. Солянин)

16. Натуральные числа a, b таковы, что $p = 8a + 19b$ — простое число. Докажите, что число $n = ab - 7a - 18b + 1$ не делится на p .

(Ф. Петров)

17. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL . Известно, что $\angle ABC = 2\angle ACB$. Точка X — середина стороны AB , а точка Y на стороне BC такова, что $CY = AX$. Докажите, что прямая XY касается описанной окружности треугольника LCY .

(А. Пастор)



18. Дан квадратный трехчлен $f(x) = x^2 + px + q$, где $p, q \geq 0$, имеющий два различных вещественных корня. Натуральные числа a и b таковы, что $f(a) < f(b) < 1,001f(a)$. Докажите, что $f(b) - f(a) > 4001$.

(А. Храбров)

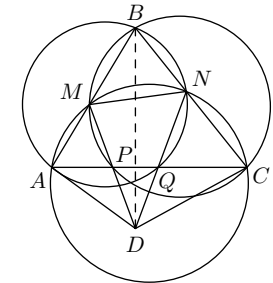
10 класс

19. Дано 100 различных натуральных чисел. Они разбиты на 50 пар так, что сумма чисел в каждой паре больше 1000. Докажите, что если выписать все 100 чисел в порядке возрастания, то сумма 50-го и 51-го чисел тоже окажется больше 1000.

(С. Берлов)

20. На сторонах AB и BC выпуклоугольного четырехугольника $ABCD$ выбраны точки M и N соответственно. Отрезки MD и ND пересекают диагональ AC в точках P и Q соответственно. Оказалось, что четырехугольники $BMPC$, $BNQA$ и $AMNC$ вписанные. Докажите, что $\angle BDN = \angle BDM$.

(А. Смирнов)



21. См. задачу 16.

22. У Саши на калькуляторе есть лишь три кнопки. Они запрограммированы на вычисление трех функций:

$$\frac{x+2}{2x+3}, \quad \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{6} \quad \text{и} \quad \sin(5x)$$

(при $x = -3/2$ первая кнопка не работает). Никаких других действий этот калькулятор делать не умеет. Изначально на экране

горит число $1/2$. Может ли Саша получить на экране число, большее миллиона? (А. Храбров, А. Смирнов, Ф. Петров)

23. В таблице 8×10 отмечены клетки, лежащие в двух левых столбцах, а также клетки, лежащие в двух нижних строках (всего 32 клетки). Юный шахматист Алёша хочет обойти все эти клетки по разу ходом шахматного короля, начав и закончив движение в левом нижнем углу. Сколькими способами Алёша может осуществить задуманное? (А. Федотов)

11 класс

24. В выборах царя зверей в зоопарке участвовало четыре кандидата: Кабан, Лев, Медведь и Носорог. Число проголосовавших за Кабана оказалось ровно в 3 раза больше, чем результат Льва в процентах. Число проголосовавших за Льва в 3 раза больше результата Медведя в процентах; число проголосовавших за Медведя в 3 раза больше результата Носорога в процентах. Наконец, число проголосовавших за Носорога в 3 раза больше результата Кабана в процентах. Сколько зверей проголосовало за Кабана? (А. Чухнов)

25. У Саши на калькуляторе всего четыре кнопки. С их помощью можно вычислять функции $x+5$, x^3 , $\sin x$, $\cos x$. Никаких других действий этот калькулятор делать не умеет. Изначально на экране горело число 2. Можно ли получить на экране число 3? (А. Храбров)

26. В прямоугольной таблице с 21 строками и 70 столбцами расставлены вещественные числа. Известно, что сумма чисел в каждой фигурке вида $\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}$ равна 1 (при этом фигурка может быть как угодно повернута и перевернута). Найдите сумму чисел в нижней строке. (С. Берлов, А. Храбров, Д. Ростовский)

27. Найдите все пары натуральных чисел p и q , для которых

$$p^3 - p^2q - 18p = 2q^2 - 3q + 1$$

и число p — простое.

(А. Сольнин)

28. Могут ли четыре диагонали параллелепипеда (не обязательно прямоугольного) иметь длины 2, 3, 5 и 11? (Ф. Петров, А. Смирнов)