Второй тур

6 класс

29. 1 сентября на перемене учительница оставила на столе классный журнал и дети стали выставлять туда оценки. Каждая девочка поставила 18 пятерок, а каждый мальчик — 11 двоек. В результате у каждой девочки появилось 7 оценок, а у каждого мальчика — 21 оценка. Кого было больше — мальчиков или девочек? (*Жюри*)

30. 40 путешественников выехали из Петербурга: двое 1-го января, двое 2-го января, ..., двое 20-го января. Вернулись они в феврале: двое 1-го февраля, двое 2-го февраля, ..., двое 20-го февраля. Все путешественники уезжали в полдень и приезжали тоже в полдень. Докажите, что какие-то двое потратили на путешествие поровну дней. (*В. Самойлов*)

31. Маньяк Вася исследует, на сколько изменяется произведение цифр числа при увеличении числа на 12. С этой целью для каждого из чисел от 2013 до 20139999 он выписал в тетрадь это изменение (например, для числа 11 111 он выписал 5, а для числа 11 119 он выписал отрицательное изменение $-6 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 9$). Чему равна сумма всех Васиных чисел? (*К. Тыщук*)

32. У бизнесменов Васи, Пети и Коли в кошельках есть только монеты по X рублей и монеты по Y копеек (X и Y — натуральные числа, $Y < 100$). За свой новый BMW Вася отдал миллион монет и получил на сдачу коробо́к спичек ценой 1 коп. Петя за такой же BMW тоже отдал миллион монет, но в качестве сдачи ему дали автомобиль «Запорожец». А счастливчику Коле за миллион монет дали BMW и два «Запорожца»! Найдите X и Y. (*М. Антипов*)

33. Для изготовления ккколы нужно знать 20 химических формул. Каждый сотрудник компании знает 5 формул. При

этом сотрудников так много, что любой возможный набор из пяти формул известен какому-то из сотрудников. Требуется разделить сотрудников на несколько отделов так, чтобы никакой отдел не смог сделать ккколу самостоятельно (то есть чтобы его сотрудники не знали всех формул). Каким наименьшим количеством отделов удастся обойтись? (*О. Иванова*)

34. Из квадрата 300×300 вырезано несколько клеток, не граничащих ни по стороне, ни по углу. Миша хочет вырезать из оставшегося куска один уголок из трех клеток. Миша посчитал все способы это сделать, и получил ровно 48 000 способов. Докажите, что он обсчитался. (*М. Иванов, К. Сухов*)

7 класс

35. Старательный мальчик Вася решил исследовать, на сколько меняется сумма цифр числа при его увеличении на 2. С этой целью для каждого из чисел от 1 до 1 000 000 000 он выписал в тетрадочку это изменение (например, для числа 15 он выписал 2, а для числа 38 он выписал отрицательное изменение -7). Чему равна сумма всех выписанных Васей чисел? (*К. Тыщук*)

36. См. задачу 32.

37. В мешке лежат 300 шариков: 100 белых, 100 синих и 100 красных. Кучка из нескольких шариков называется *хорошей*, если в ней присутствуют лишь два цвета шариков, причем шариков этих цветов поровну, например, 3 белых и 3 красных шарика образуют хорошую кучку (два шарика — это тоже куча!). Вася каждую минуту вынимает из мешка очередной шарик, и очень хочет, чтобы в какой-нибудь момент из всех уже вынутых шариков можно было сложить одну или две (непустых) хороших кучки. Докажите, что не позже, чем через 200 минут ему это удастся. (*С. Берлов*)

38. Докажите, что не существует трёх разных натуральных чисел, каждое из которых равно наименьшему общему кратному своих разностей с двумя другими. (*А. Голованов*)

39. Из прямоугольника 2011×2012 вырезаны несколько клеток, не граничащих ни по стороне, ни по углу. Из оставшегося куска нужно вырезать один уголок из трех клеток. Миша подсчитал все способы, которыми это можно сделать, и получил ровно 12 341 234 способа. Докажите, что он обсчитался.

(*М. Иванов, К. Сухов*)

40. Точки P и Q расположены внутри равностороннего треугольника ABC так, что четырёхугольник $APQC$ — выпуклый, $AP = PQ = QC$ и $\angle PBQ = 30°$. Докажите, что $AQ = BP$.

(*С. Берлов*)

41. Пятьдесят единиц и пятьдесят чисел -1 расставлены по кругу так, что одинаковые числа не стоят рядом. Каждую минуту Вася стирает какое-нибудь из этих чисел и записывает в тетрадку сумму этого числа и двух соседних. Докажите, что через 98 минут произведение чисел, записанных в тетрадку, будет положительным. (*М. Антипов*)

8 класс

42. См. задачу 35.

43. Даны числа $x > y > 0$. Известно, что $xy \geqslant 1$. Докажите, что $\frac{x^3+y^3}{x-y} > 4$. (*А. Храбров*)

44. В мешке лежат 10 000 шариков ста цветов: по 100 шариков каждого цвета. Сережа каждую минуту вынимает из мешка очередной шарик. Он очень хочет в какой-нибудь момент разбить все уже вынутые шарики на тройки, в каждой из которых три разноцветных шарика. Более того, Сережа хочет, чтобы какой-нибудь цвет присутствовал во всех тройках. Докажите, что не позже чем через 300 минут ему это удастся. (*С. Берлов*)

45. См. задачу 40.

46. В стране несколько городов, некоторые из которых соединены дорогами с односторонним движением так, что из столицы можно добраться до любого города, не нарушая правил дорожного движения (при этом, возможно, проезжая через другие города). Назовем два нестоличных города *близкими*, если до них нельзя добраться из столицы по непересекающимися (то есть не проходящими через общие города) путям. Президент приказал соединить каждые два близких города прямой авиалинией. Оказалось, что теперь между любыми двумя нестоличными городами можно добраться, пользуясь только открытыми авиалиниями. Докажите, что тогда между любыми двумя нестоличными городами есть прямая авиалиния.

(*К. Тыщук, С. Берлов*)

47. На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC выбраны точки P, Q, R соответственно таким образом, что $AR = PR, CR = QR$ и BR — биссектриса угла PRQ. Докажите, что прямые PQ и AC параллельны. (*С. Берлов*)

48. Последовательность $a_1, \ldots, a_n$ состоит из различных натуральных чисел. Известно, что для любых двух различных номеров k и m выполнено неравенство

$$\text{НОД}\big(|a_k - a_m|, |k - m|\big) < 2013.$$

Найдите наибольшее возможное значение n. (*А. Голованов*)

9 класс

49. Натуральное число A называется интересным, если оно делится на любое число, которое остается после зачеркивания в A нескольких последних цифр. Найдите наибольшее интересное число, состоящее из различных цифр. (*С. Берлов*)

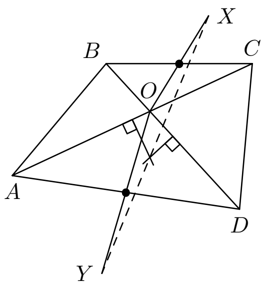
50. Сумма квадратов вещественных чисел a, b, c и d равна 1. Докажите, что $(1 - a)(1 - b) \geqslant cd$. (*А. Храбров*)

51. Биссектриса угла B треугольника ABC пересекает прямую, проходящую через A параллельно BC, в точке X; она же пересекает прямую, проходящую через C параллельно AB, в точке Y. Известно, что $XY = AC$. На сколько могут отличаться углы A и C? (*С. Берлов*)

52. На столе стоят 100 стаканов, в которых лежат 101, 102, ..., 200 вишневых косточек. Двое играют в следующую игру. За один ход разрешается вынуть из любого стакана любое количество косточек (даже все), но после хода все стаканы по-прежнему должны содержать различное число косточек. Проигрывает не имеющий хода. Кто выигрывает при правильной игре? (*С. Берлов*)

53. На доске написаны 100 чисел из интервала $(0, 1)$. Разрешается выбрать два числа a и b и заменить их на два корня квадратного трехчлена $x^2 - ax + b$ (если этот трехчлен имеет два корня). Докажите, что этот процесс не может продолжаться бесконечно долго. (*В. Франк*)

54. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Точки X и Y симметричны точке O относительно середин сторон BC и AD соответственно. Известно, что $AB = BC = CD$. Докажите, что точка пересечения серединных перпендикуляров к диагоналям четырехугольника лежит на прямой XY. (*А. Смирнов*)

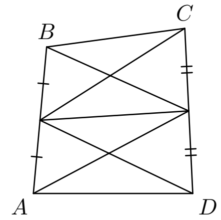


55. Дано 54-значное число из единиц и нулей. Докажите, что остаток от его деления на число $33 \cdot 34 \cdot \ldots \cdot 39$ больше, чем 100 000. (*М. Антипов*)

10 класс

56. См. задачу 49.

57. Будем называть четырехугольник *равнодиагональным*, если у него равны диагонали. Отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$, делит его на два равнодиагональных четырехугольника. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ сам равнодиагональный. (*С. Берлов*)



58. По кругу стоят черные и белые точки (не меньше 12 штук), так что у каждой точки среди 10 её соседей (5 слева и 5 справа) поровну черных и белых. Докажите, что количество точек делится на 4. (*М. Антипов*)

59. См. задачу 53.

60. См. задачу 54.

61. В роте 85 солдат. Каждый день старшина выбирает одного солдата и отправляет в поле красить траву его, а также либо всех тех, кто и выше, и старше выбранного, либо всех тех, которые и ниже, и младше выбранного. Докажите, что через 10 дней можно будет найти пару солдат, которые красили траву в одни те же дни. Рост и возраст у всех солдат различны. (*М. Антипов*)

62. Пусть a_1 и a_2 — натуральные числа, b_1 — собственный делитель числа a_1, b_2 — собственный делитель числа a_2. (Собственным делителем числа называется любой натуральный делитель, отличный от единицы и самого числа.) Докажите, что $a_1b_1 + a_2b_2 - 1$ не делится на a_1a_2. (*А. Храбров*)

11 класс

63. Найдите наименьший положительный нецелый корень уравнения $\sin x = \sin[x]$. Здесь $[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x. Напомним, что $\pi = 3,1415\ldots$

(*Ф. Петров*)

64. На математическом факультете учатся 40 юношей и 10 девушек. Каждая девушка дружит либо в точности со всеми теми юношами, кто старше её, либо в точности с теми, кто выше её. Докажите, что у каких-то двух юношей множества подруг совпадают. (*М. Антипов*)

65. Точки M и N — середины ребер AB и CD тетраэдра $ABCD$. Оказалось, что $AN = DM$ и $CM = BN$. Докажите, что $AC = BD$. (*По мотивам задачи 57*)

66. Найдите все пары простых чисел p и q (не обязательно различных), для которых числа $2p-1$, $2q-1$ и $2pq-1$ являются квадратами натуральных чисел. (*Ф. Петров, А. Смирнов*)

67. Даны числа $x_1, \ldots, x_{n+1} \in [0,1]$, причем $x_{n+1} = x_1$. Докажите, что

$$\prod_{i=1}^{n}(1 - x_i x_{i+1} + x_i^2) \geqslant 1.$$

(*А. Храбров, Ф. Петров*)

68. Пусть S_c и S_a — вневписанные окружности треугольника ABC (S_c касается отрезка AB, S_a — отрезка BC). Окружность S проходит через точку B, касается внешним образом окружностей S_a и S_c и пересекает отрезок AC в точках M и N. Докажите, что $\angle ABM = \angle NBC$. (*А. Смирнов*)

69. В языке волков две буквы: Ф и П, любая конечная последовательность которых образует слово. Слово Y называется *потомком* слова X, если Y получается из X вычеркиванием некоторых букв (например, слово ФФПФ имеет 8 потомков: Ф, П, ФФ, ФП, ПФ, ФФП, ФПФ, ФФФ). При данном n определите, какое наибольшее число потомков может иметь n-буквенное слово языка волков. (*Ф. Петров, В. Волков*)