САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2012 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 9 класс.

---

1. Найдите все такие целые числа b, для которых уравнение $[x^2]-2012x+b=0$ имеет нечетное число корней. (*А. Храбров*)

2. Натуральные числа a, b, c больше 100 и взаимно просты в совокупности (то есть все три числа не имеют общего делителя, кроме 1). Известно, что $a+b$ делится на c и $b+c$ делится на a. Найдите наименьшее возможное значение b. (*С. Берлов*)

3. Биссектриса угла между диагоналями вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекает стороны AB и CD в точках X и Y соответственно. Известно, что середина стороны AD равноудалена от точек X и Y. Докажите, что середина стороны BC также равноудалена от точек X и Y. (*С. Берлов*)

4. В ЕГЭ принимают участие 25 школьников. Экзамен состоит из нескольких вопросов, на каждый из которых можно дать один из пяти вариантов ответа. Оказалось, что любые два школьника не более чем на один вопрос ответили одинаково. Докажите, что в ЕГЭ было не больше 6 вопросов.

. . . .

Олимпиада 2012 года. II тур. 9 класс. Выводная аудитория.

5. В клетках квадрата 100×100 расставлены натуральные числа, причем в каждой строчке и в каждом столбце все числа различны. Может ли оказаться, что для любого квадрата со сторонами, идущими по линиям сетки, сумма чисел в четырех угловых клетках этого квадрата является квадратом натурального числа? (*В. Франк*)

6. На биссектрисе угла B треугольника ABC (внутри треугольника) выбрана точка L, а на отрезке BL выбрана точка K. Известно, что $\angle KAB=\angle LCB=\alpha$. Внутри треугольника выбрана точка P такая, что $AP=PC$ и $\angle APC=2\angle AKL$. Докажите, что $\angle KPL=2\alpha$. (*С. Берлов*)

7. У ослика Иа-Иа есть 2012 палочек натуральной длины, сумма их длин равна n. Ослик хочет выломать из них 2012 палочек: длины 1, длины 2, …, длины 2012. (Из одной палочки можно выламывать несколько, например, из палочки длины 6 можно выломать палочки длины 1 и 4). При каком наименьшем n Иа-Иа заведомо сможет это сделать? (*А. Храбров*)