САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2012 года ПО МАТЕМАТИКЕ

I тур. 9 класс.

1. На доске выписаны несколько последовательных натуральных чисел. Ровно 52% из них четны. Какое количество нечетных чисел выписано на доске? (*Жюри*)

2. В таверне “Подзорная труба” сидят несколько пиратов. Некоторые из них пьют грог, а остальные — ром. Средний возраст пиратов, пьющих грог, — 22 года, а пьющих ром — 45 лет. В один прекрасный момент Джон Сильвер поменял свой напиток. В результате оба средних возраста — и пьющих грог, и пьющих ром — увеличились ровно на 1 год. Сколько пиратов сидит в таверне? (*А. Храбров*)

3. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке X, а лучи DA и CB — в точке Y. Луч BA пересекает описанную окружность треугольника DXY в точке M, а луч BC пересекает ту же окружность в точке N. Докажите, что $NX + MY > XY$. (*А. Пастор*)

4. Квадрат 15×15 разбит на квадратики 1×1. Из этих квадратиков выбрали несколько, и в каждом из выбранных провели одну или две диагонали. Оказалось, что никакие две проведенные диагонали не имеют общих концов. Какое наибольшее число диагоналей может быть проведено? (В решении приведите ответ, способ проведения диагоналей и доказательство того, что это число диагоналей действительно наибольшее возможное.) (*А. Голованов*)

5. Какое наименьшее значение может принимать величина

$$a^{2012} + a^6 + \frac{1}{a^6 + 1},$$

если a — произвольное вещественное число? (*К. Кохась*)