САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2012 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 8 класс.

---

1. Костя выписал на доске 155 последовательных натуральных чисел, после чего все использованные в этой записи единицы заменил на тройки, все тройки — на семерки и все семерки — на единицы. Он утверждает, что на доске вновь оказались 155 последовательных натуральных чисел (в некотором порядке). Докажите, что он ошибается. (*К. Кохась*)

2. На конференции "Истина и ложь в современном обществе" собрались за круглым столом рыцари и лжецы. Каждый из них повернулся к одному из своих соседей и произнес одну из двух фраз: "ты — рыцарь" или "ты — лжец". После этого корреспондент задал каждому участнику два вопроса: "называл ли вас лжецом ваш левый сосед" и "называл ли вас лжецом ваш правый сосед"? Среди всех ответов на эти вопросы ровно сто раз прозвучал ответ "Да". Каково наименьшее возможное число лжецов за столом? (*О. Иванова*)

3. Наибольший собственный делитель натурального числа n равен d. Может ли наибольший собственный делитель $n+2$ равняться $d+2$? (*Собственным делителем* числа называется любой его натуральный делитель, кроме 1 и самого числа.) (*А. Голованов*)

4. BL — биссектриса треугольника ABC такого, что $\angle C = 3\angle A$. На стороне AB отмечена точка M, а на стороне AC — точка N такие, что $\angle AML = \angle ANM = 90°$. Докажите, что $BM + 2MN > BL + LM$. (*А. Пастор*)

. . . .

Олимпиада 2012 года. II тур. 8 класс. Выводная аудитория.

5. Дана арифметическая прогрессия с положительными членами $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Докажите неравенство

$$\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \ldots + \frac{1}{a_n^2} \geq \frac{n}{a_1 a_n}.$$

(*Арифметической прогрессией* называется последовательность, для которой при всех i и некотором фиксированном d выполняется равенство $a_{i+1} = a_i + d$) (*А. Храбров*)

6. В четырехугольнике $ABCD$ длины сторон BC и AD равны. Точка P — середина стороны BC, K — проекция D на отрезок AP. Оказалось, что $DC = CK$ и $\angle PAD = \angle ABC$. Докажите, что $AB = AP$. (*Д. Максимов, Ф. Петров*)

7. В компании из 100 человек каждый знаком ровно с 40 другими, но никакие двое не имеют более 20 общих знакомых. Докажите, что из этой компании можно выбрать 22 человека, которых можно посадить за круглый стол так, чтобы каждый из них был знаком ровно с одним из двух своих соседей. (*Д. Карпов, С. Берлов*)