САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2012 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 11 класс.

1. Вещественные числа a, b, c таковы, что среди трех уравнений

$$x^3 - ax^2 + b = 0, \quad x^3 - bx^2 + c = 0, \quad x^3 - cx^2 + a = 0$$

любые два имеют общий корень. Докажите, что $a = b = c$.

2. На полке в алфавитном порядке стоит многотомная энциклопедия “Всё о собаках”, каждый том на своем специально выделенном месте. Возле каждого места прикреплена инструкция, предписывающая одно из четырех действий: переставить этот том на одно или два места влево или вправо. Если одновременно выполнить все инструкции, тома окажутся расставленными на тех же местах в другом порядке. Кинолог Дима каждое утро выполняет все инструкции. Однажды он обнаружил, что том “Болонки” стоит на месте, которое вначале занимал том “Таксы”. Докажите, что через некоторое время том “Мопсы” будет стоять на первоначальном месте тома “Пудели”. *(Д. Максимов, Ф. Петров)*

3. В основании пирамиды $SABCD$ лежит выпуклый четырехугольник $ABCD$, такой что $BC \cdot AD = BD \cdot AC$. Оказалось, что $\angle ADS = \angle BDS$ и $\angle ACS = \angle BCS$. Докажите, что плоскость SAB перпендикулярна плоскости основания.

4. Вещественные числа $x_1, \ldots, x_n$ таковы, что

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant 1\,.$$

Докажите, что найдутся наборы вещественных чисел $y_1, \ldots, y_n$ и $z_1, \ldots, z_n$, такие что

$$|y_1| + |y_2| + \ldots + |y_n| \leqslant 1, \quad \max\bigl(|z_1|, |z_2|, \ldots, |z_n|\bigr) \leqslant 1$$

и $x_i = \frac{y_i + z_i}{2}$ при всех i. *(Ф. Петров)*

. . . .

Олимпиада 2012 года. II тур. 11 класс. Выводная аудитория.

5. Даны натуральные числа n и k, причем $n \geqslant k$. Некоторое натуральное число S имеет не менее n натуральных делителей (включая единицу и само число). Все делители числа S выписаны в ряд в порядке убывания. Какое наименьшее количество делителей может иметь k-е число в этом списке? *(Ф. Петров)*

6. На координатной плоскости в первой четверти проведены 100 непересекающихся единичных отрезков, параллельных координатным осям. Эти отрезки — зеркала (с обеих сторон), они отражают свет по правилу «угол падения равен углу отражения». (При попадании в край зеркала луч света не изменяет своего направления.) Из точки, лежащей в единичном круге с центром в начале координат, выпускают луч света в направлении биссектрисы первого координатного угла. Докажите, что эту начальную точку можно выбрать так, чтобы луч отразился от зеркал не более 150 раз. *(С. Иванов)*

7. Некоторые города России соединены с некоторыми городами Украины международными авиалиниями. Межгосударственный совет по содействию миграции собирается ввести на каждой авиалинии одностороннее движение так, чтобы, вылетев из города, в него уже нельзя было вернуться (пользуясь другими односторонними авиалиниями). Докажите, что количество способов сделать это не делится на три.

(Ф. Петров)