САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2012 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 11 класс.

---

1. Корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ равны $\sin 42°$ и $\sin 48°$. Докажите, что $b^2 = a^2 + 2ac$. (*С. Иванов*)

2. В Чудеснопольской больнице работали штатные и внештатные врачи. Для выполнения нацпроекта «Статистика» одного штатного врача перевели во внештатные (не изменив его зарплату). В результате и у штатных, и у внештатных врачей средняя зарплата увеличилась на 3 гроша. Вдохновившись успехом, руководство перевело еще одного врача из штатных во внештатные (снова не меняя зарплаты). Средняя зарплата как штатных, так и внештатных врачей увеличилась на 3 %. Чему равна средняя зарплата всех врачей в больнице? (*А. Храбров*)

3. На острове жили 2011 негритят, каждый из которых был либо "рыцарем", всегда говорящим правду, либо "лжецом", который всегда лжет. Один из негритят сказал: *Среди жителей острова, отличных от меня, нечетное число лжецов.* После чего поперхнулся, и их осталось 2010. Еще один из негритят сказал ту же самую фразу: *Среди жителей острова, отличных от меня, нечетное число лжецов*, после чего не проснулся, и их осталось 2009. И так далее, они по одному говорили эту фразу и исчезали. Сейчас на острове осталось 10 негритят. Сколько лжецов могло быть среди негритят изначально?

(*О. Иванова, Ф. Петров*)

4. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ оказалось, что $\angle CAA_1 = 90°$ и $AD = CB_1$. Докажите, что $\angle DB_1B = 90°$. (*Д. Максимов, Ф. Петров*)

5. Для натурального n пусть $f(n)$ — наименьшее натуральное число, такое что $n \cdot f(n)$ — квадрат натурального числа (например, $f(12) = 3$). Докажите, что для натуральных k из промежутка $[10^{2011}; 10^{2011} + 10^{1000}]$ все значения $f(k)$ различны. (*Д. Максимов, Ф. Петров*)