САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2011 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 9 класс.

---

1. Дима задумал три числа — a, b и c — и обнаружил, что квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет два различных ненулевых корня: 1 и s. Саша изменил значение одного из коэффициентов a, b или c. В результате получился трехчлен, у которого тоже два различных корня: 2 и $3s$. Чему может быть равно s? Приведите все варианты ответа и докажите, что других нет. (*О. Иванова*)

2. В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD биссектриса угла B пересекает отрезок AD в точке M. Известно, что $AB = 4$, $BC = 9$ и $CD = 3$. В каком отношении точка M делит отрезок AD? (*С. Берлов*)

3. Три школьника написали поровну слов. Слово, встречающееся у всех троих школьников, оценивается в 0 баллов; за слово, которое присутствует у двоих школьников, каждый из них получает по 7/2 балла; наконец, слово, встречающееся лишь у одного школьника, стоит 5 баллов. Могли ли школьники в сумме набрать ровно 2011 баллов? (*К. Кохась*)

4. Произведение положительных чисел x и y равно 7. Докажите неравенство

$$x^{[x]} + y^{[y]} \geq 14\,.$$

(Запись $[x]$ обозначает целую часть числа, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее x.) (*А. Храбров*)

5. На доске в ряд выписаны 10 натуральных чисел. Саша вычислил сумму каждой пары подряд стоящих чисел, затем он вычислил суммы каждых трех подряд стоящих чисел, потом — каждых четырех и т.д.; и наконец, сумму всех чисел на доске. Все найденные суммы, а также 10 исходных чисел с доски, Саша вперемешку записал в тетрадку. Мог ли у него получиться набор из 55 последовательных натуральных чисел? (*А. Храбров*)