САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2011 года ПО МАТЕМАТИКЕ

I тур. 11 класс.

1. Квадратный трехчлен $f(x) = x^2 + bx + c$ имеет ровно один корень. Кроме того, уравнение

$$f(2x-3) + f(3x+1) = 0$$

имеет ровно один корень. Найдите b и c. (*С. Иванов*)

2. Несколько девятиклассников, десятиклассников и одиннадцатиклассников встали в круг. Оказалось, что имеется ровно 20 десятиклассников и ровно 25 одиннадцатиклассников, рядом с каждым из которых стоит хотя бы один девятиклассник. Докажите, что рядом с кем-то стоит два девятиклассника. (*А. Голованов*)

3. Произведение положительных чисел x и y равно 7. Докажите неравенство

$$x^{[x]} + y^{[y]} \geq 14\,.$$

(Запись $[x]$ обозначает целую часть числа, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее x.) (*А. Храбров*)

4. В окружность вписан пятиугольник $ABCDE$. Отрезки AC и BD пересекаются в точке K. Отрезок CE касается описанной окружности треугольника ABK в точке N. Найдите $\angle CNK$, если известно, что $\angle ECD = 40^\circ$. (*А. Смирнов*)

5. Даны 46 различных натуральных чисел. Все их простые делители меньше 20. Докажите, что сумму каких-нибудь двух из них можно разложить в произведение трех натуральных чисел, больших 1. (*А. Голованов*)