САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2011 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
I ТУР. 10 КЛАСС.

---

1. Квадратный трехчлен $f(x)$ имеет ровно один корень. Кроме того, уравнение

$$f(2x-3)+f(3x+1)=0$$

имеет ровно один корень. Найдите корень трехчлена $f(x)$. (Приведите все варианты и докажите, что других нет.) (*С. Иванов*)

2. В некоторых клетках квадратной таблицы стоят звездочки. Клетка называется красивой, если и в содержащей ее строчке стоит нечетное число звездочек, и в содержащем ее столбце стоит нечетное число звездочек. (В красивой клетке может стоять звездочка, а может и не стоять.) Саша насчитал в таблице ровно 2010 красивых клеток. Докажите, что он не прав. (*Д. Максимов*)

3. Докажите, что если $x \le y$, то $\frac{2^x+3^y}{2} \ge 6^{\frac{x+y}{4}}$. (*А. Голованов*)

4. Даны 46 различных натуральных чисел. Все их простые делители меньше 20. Докажите, что сумму каких-нибудь двух из них можно разложить в произведение трех натуральных чисел, больших 1.

(*А. Голованов*)

5. Две окружности пересекаются в точках E и F. Прямая ℓ пересекает первую окружность в точках A и B, вторую — в точках C и D так, что точка E лежит внутри треугольника ADF, а точки B и C — на отрезке AD. Оказалось, что $AB = CD$. Докажите, что $BE \cdot DF = CE \cdot AF$.

(*Д. Максимов*)