САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2009/10 года ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 9 КЛАСС

1. В некоторой клетке шахматной доски стоит король. Каждый день, начиная с понедельника, Сережа делает этим королем один ход. По воскресеньям он делает ход на одну клетку по диагонали, а в каждый из остальных дней — на одну клетку по горизонтали или по вертикали. Сережа никогда не ставит короля на клетку, на которой король уже однажды побывал (считается, что на исходной клетке король уже побывал). На каком наибольшем количестве клеток сможет побывать король?

(*С. Берлов*)

2. Точки M и N — середины сторон AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$. На сторонах AD и BC выбраны точки X и Y так, что $XD = 3AX$ и $YC = 3BY$. Оказалось, что $\angle MXA = \angle MYB = 90°$. Докажите, что $\angle XMN = \angle ABC$. (*С. Берлов*)

3. Числа a и $a^3 - 6a$ — различные корни квадратного трехчлена с целыми коэффициентами. При этом число a иррационально. Чему может быть равно a? (*А. Храбров*)

4. Натуральное число A состоит из 20 цифр. На доску выписали число $\underbrace{AA\ldots A}_{101\text{ раз}}$, после чего после чего последние 11 цифр стерли. Докажите, что полученное 2009-значное число не может быть степенью двойки.

(*А. Голованов*)

. . . .

Олимпиада 2009/10 года. II тур. 9 класс. Выводная аудитория

5. В стране 2010 городов и любые два из них соединены дорогой (не проходящей через другие города). Бизнесмен и Министерство Дорожного Строительства играют в игру. Бизнесмен каждое утро приватизирует одну из дорог, а Министерство каждый вечер разрушает по десять еще не приватизированных дорог. Сможет ли Бизнесмен, несмотря на козни Министерства, создать циклический маршрут по приватизированным дорогам, проходящий по одному разу по 11 разным городам? (*С. Берлов*)

6. Положительные числа a, b, c удовлетворяют условию $\dfrac{3}{abc} \geqslant a+b+c$. Докажите неравенство $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \geqslant a+b+c$.

(*А. Храбров*)

7. Вписанная окружность треугольника ABC касается его сторон BC, CA и AB в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Прямая AA_1 вторично пересекает эту окружность в точке E. Точка N — середина отрезка A_1B_1. Точка M симметрична точке N относительно прямой AA_1. Докажите, что $\angle EMC = 90°$. (*А. Смирнов*)