САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2009/10 года ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 11 КЛАСС

1. Решите в положительных числах систему уравнений

$$x^y = z, \qquad y^z = x, \qquad z^x = y\,.$$

(*Ф. Петров*)

2. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) отмечены середины X и Y сторон AB и AC соответственно. Точка Z — основание перпендикуляра из точки B на прямую CX. Докажите, что центр описанной окружности треугольника XYZ лежит на прямой AC. (*Ф. Бахарев*)

3. В стране 2009 городов и любые два из них соединены дорогой (не проходящей через другие города). Бизнесмен и Министерство Дорожного Строительства играют в игру. Бизнесмен каждое утро приватизирует одну из дорог, а Министерство каждый вечер разрушает по десять еще не приватизированных им дорог. Сможет ли Бизнесмен, несмотря на козни Министерства, создать циклический маршрут из приватизированных дорог, проходящий по одному разу ровно по 75 разным городам?

(*С. Берлов*)

4. Дано натуральное число. Из него вычитается самое большое простое число, не превосходящее его. С результатом снова производится такая же операция и т. д. Назовем число качественным, если из него через несколько шагов получается 1, и некачественным — если ноль. Докажите, что среди чисел от 1 до 1 000 000 качественные составляют не менее четверти, но не более половины. (*А. Голованов*)

. . . .

Олимпиада 2009/10 года. II тур. 11 класс. Выводная аудитория

5. Дана четырехугольная пирамида $SABCD$, боковые грани которой — остроугольные треугольники, точки пересечения высот которых лежат в одной плоскости. Диагонали AC и BD основания пирамиды пересекаются в точке P. Оказалось, что SP — высота пирамиды. Докажите, что $AC \perp BD$. (*Д. Максимов*)

6. Известно, что для положительных чисел a, b, c выполняется равенство $ab + bc + ac = a + b + c$. Докажите, что $a+b+c+1 \geqslant 4abc$. (*К. Сухов*)

7. 600 натуральных чисел из отрезка $[1; 1000]$ покрашены в малиновый цвет. Отрезок натурального ряда $[k; n]$ называется вкусным, если в нем найдутся два малиновых числа с любой целой разностью от 1 до $n - k$. Докажите, что существует вкусный отрезок $[a; b]$, в котором $b - a \geqslant 199$.

(*Е. Малинникова, С. Рукшин*)