САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2009/10 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 11 КЛАСС

1. Расставьте в таблице 3×3 числа от 15 до 23 так, чтобы все суммы в парах соседних клеток были различны. *(В. Франк)*

2. Числа a, b, c $(0 < a < b < c < \pi)$ образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что квадратное уравнение

$$(\sin a)\, x^2 + 2(\sin b)\, x + \sin c = 0$$

имеет два различных вещественных корня. *(Ф. Петров)*

3. Натуральные числа x и y меньше 4 000 000. Дима разделил с остатком число $2x+1$ на 2009, Саша разделил с остатком число $2y-1$ на 2010, а Сережа разделил с остатком число $x+y$ на 4019. У всех трех мальчиков остатки оказались одинаковыми. Докажите, что неполные частные у Димы и Саши равны. *(Д. Ростовский)*

4. На Поле Чудес растут три дерева. Если закопать несколько золотых под одним из них, то наутро сумма удвоится, если под другим — утроится, если под третьим — исчезнет. У Буратино есть 100 золотых. Он не знает, какое из деревьев удваивает деньги, какое утраивает, а какое уничтожает. Какую наибольшую сумму он может обеспечить себе наутро? *(Д. Максимов)*

5. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. В треугольнике ABC выбрана точка P, а в параллелограмме ACC_1A_1 — точка K так, что прямая PK параллельна плоскости ACD_1. Докажите, что отрезок PK делится плоскостью ACB_1 пополам. *(Ф. Бахарев, Ф. Петров)*