САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2009/10 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
II ТУР. 10 КЛАСС

---

1. Дан квадратный трехчлен $f(x)$. Всегда ли можно найти такой многочлен четвертой степени $g(x)$, что уравнение

$$f(g(x)) = 0$$

не имеет решений? (*А. Голованов*)

2. У каждого из десяти последовательных трехзначных чисел выписали на доску наибольший его делитель, меньший самого этого числа. Докажите, что среди выписанных чисел есть два, оканчивающихся одной и той же цифрой. (*А. Голованов*)

3. Точки M и N — середины сторон AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$. На сторонах AD и BC выбраны точки X и Y так, что $XD = 3AX$ и $YC = 3BY$. Оказалось, что $\angle MXA = \angle MYB = 90°$. Докажите, что $\angle XMN = \angle ABC$. (*С. Берлов*)

4. В стране 2010 городов, из каждого из которых выходит ровно по три дороги, ведущие в другие города. Президент и премьер-министр играют в следующую игру: они по очереди продают дороги трем частным компаниям (изначально все дороги государственные, каждый своим ходом подает ровно одну дорогу). Первым ходит премьер. Президент хочет добиться того, чтобы хотя бы для одного города все три выходящие из него дороги оказались проданы разным компаниям, а премьер хочет этого избежать. Проигравший уходит в отставку. Кто из двух уважаемых политиков сможет сохранить свой пост при правильной игре? (*Д. Карпов*)

. . . .

Олимпиада 2009/10 года. II тур. 10 класс. Выводная аудитория

5. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) отмечены середины X и Y сторон AB и AC соответственно. Точка Z — основание перпендикуляра из точки B на прямую CX. Докажите, что центр описанной окружности треугольника XYZ лежит на прямой AC. (*Ф. Бахарев*)

6. Дано натуральное число. Из него вычитается самое большое простое число, не превосходящее его. С результатом снова производится такая же операция и т.д. Докажите, что существует число, из которого ровно через 1000 шагов впервые получится ноль. (*А. Голованов*)

7. Квадрат 200×200 покрашен в 2 цвета в шахматном порядке. Разрешается перекрашивать все клетки прямоугольника 2×3. Можно ли сделать все клетки одноцветными? (*Д. Карпов, С. Берлов*)