САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2009/10 года ПО МАТЕМАТИКЕ I тур. 10 КЛАСС

1. $f(x)$, $g(x)$ и $f(x)+g(x)$ — квадратные трехчлены. Саша выписал на доску все корни этих квадратных трехчленов. Оказалось, что среди выписанных чисел имеется ровно три различных числа. Докажите, что хотя бы один из трехчленов f, g и $f+g$ имеет ровно один корень.

(*А. Храбров*)

2. Натуральные числа x, y, z таковы, что

$$\text{НОД}(x, y) = z \quad \text{и} \quad \text{НОК}(y, z) = x\,.$$

Докажите, что $x = y = z$. (*А. Храбров*)

3. Высоты AD и BE остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Описанная окружность треугольника ABH пересекает отрезки AC и BC в точках F и G, отличных от концов. Докажите, что $FG = 2DE$. (*А. Пастор*)

4. На Поле Чудес растут три дерева. Если закопать несколько золотых под одним из них, то наутро сумма удвоится, если под другим — утроится, если под третьим — исчезнет. У Буратино есть 100 золотых. Он не знает, какое из деревьев удваивает деньги, какое утраивает, а какое уничтожает. Какую наибольшую сумму он может обеспечить себе наутро?

(*Д. Максимов*)

5. Сколько решений имеет уравнение

$$\sin[x] = \{x\}$$

на промежутке $[-2009; 2010]$? (Как обычно, $[x]$ — это целая часть числа x, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x; $\{x\} = x - [x]$ — дробная часть числа x. Тот факт, что синус ненулевого целого числа не может быть целым, можно считать известным.) (*Г. Вольфсон*)