

ОЧНЫЙ ОТБОРОЧНЫЙ ТУР. ЗАДАЧИ. РЕШЕБНИК.

для учащихся 8-х классов

Время выполнения 180 минут

Всего за задачи 100 баллов

КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

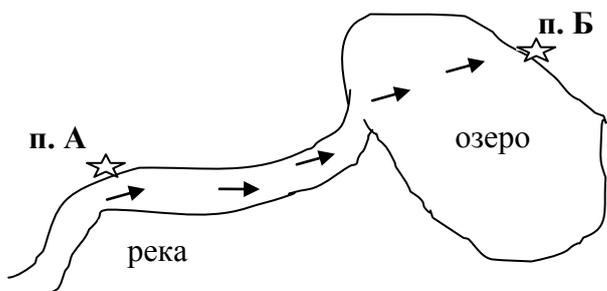
Решение каждой задачи должно быть выполнено максимально подробно, поскольку итоговая оценка учитывает то, какой процент приведенного решения является верным. Верным должно признаваться любое корректное решение приведенной задачи, независимо от того, насколько оно совпадает с авторским. Более подробные и полные решения оцениваются большим количеством баллов. Если жюри приходит к выводу, что задача скорее решена, чем не решена, то оценка должна быть больше половины от максимально возможной, в противном случае — меньше. Рекомендуется присваивать баллы за каждый шаг в решении задачи. Арифметические ошибки не должны приводить к существенному сокращению баллов, поскольку на олимпиаде, в первую очередь, проверяется не умение хорошо считать, а умение нестандартно мыслить. При наличии ошибки нужно найти ее и снизить балл исходя из степени ее существенности.

Задача 1. "Из пункта А в пункт Б ..." (20 баллов).

А) Группе туристов необходимо добраться из пункта А в пункт Б. Пункт А находится на берегу реки, а пункт Б на берегу озера (см схему). Поэтому решено было добираться на катере. Ребята договорились с Евгением, владельцем катера, что тот подбросит их до п. Б, при условии, что туристы компенсируют ему только затраты (обозначим затраты "С")

на бензин в оба конца. От пункта А до озера надо проплыть 18 км вниз по течению скорость которого 2 км в час. Затем еще по озеру 8 км до пункта Б. Известно что, по спокойной воде озера катер может идти со скоростью 10 км в час. Расход топлива равен 2 литра в час. Цена 1 литра бензина 50 рублей.

Помогите руководителю группы подсчитать, какую сумму денег он должен заплатить Евгению? **(15 баллов)**



Б) После поездки Евгений задумался, а может стоит заняться перевозкой туристов на своем катере? Но тогда он должен будет на весь сезон оставить основную работу, где сейчас зарабатывает 900 рублей в день. Желаящих совершить такую поездку достаточно, т.к. в п. Б находится знаменитая пещера с хорошо сохранившимися наскальными рисунками древних людей. Но, и желающих заработать таким образом владельцев маломерных судов хватает, поэтому цена билета (туда и обратно) не может быть больше 200 рублей.

Какое минимальное количество поездок (N) в день должен совершить Евгений, если его катер вмещает 5-х пассажиров? **(5 баллов)**

Решение:

А) Определим время необходимое катеру для прохождения каждого участка пути:

1) от п. А до озера катер идет по течению, поэтому его скорость составляет $(10 + 2) = 12$ км в час. При такой скорости катеру потребуется $t = 18/12 = 1,5$ часа **(4 балла)**

2) от реки по озеру до п. Б и обратно до реки скорость катера 10 км в час. При такой скорости катеру потребуется $t = 8/10 = 0,8$ часа. Поскольку катеру предстоит плыть еще в обратную сторону по озеру, то ему необходимо в 2 раза больше времени, т.е. $t = 0,8 * 2 = 1,6$ часа **(4 балла)**

3) от озера по реке до пункта А катер идет против течения, поэтому его скорость составляет $(10 - 2) = 8$ км в час. При такой скорости катеру потребуется $t = 18/8 = 2,25$ часа. **(4 балла)**

4) Общее время в пути составит $t = 1,5 + 1,6 + 2,25 = 5,35$ часа. **(1 балл)**

5) общие расходы на топливо составят $C = 5,35 * 50 * 2 = 535$ руб. **(2 балла)**

Б)

6) Найдем прибыль, которую может получить Евгений от одной поездки $\Pi = 5 * 200 - 535 = 465$ руб **(2 балла)**

7) Найдем количество поездок в день, которые компенсируют потерю заработной платы $N = 900 / 465 \approx 1,93$ поездки **(1 балла)**

8) Таким образом, Евгений должен совершить 2 поездки в день, т.к. количество поездок не может быть дробным числом **(2 балла)**

Ответ: А) туристы должны заплатить 535 руб. Б) не меньше 2-х поездок в день.

Задача 2. "Гиви и виноград" (20 баллов). Автор Литвинова Настя.

Гиви и его младший брат живут с бабушкой в маленьком селе Араратской долины. Доходы семьи складываются из пенсии бабушки и выручки от продажи винограда. Чтобы помочь бабушке содержать семью, Гиви планирует устроиться работать на почту. Но, чтобы развозить почту по окрестным селам, ему нужен велосипед.

Бабушка советует собрать виноград и продать на местном рынке. Виноград здесь стоит 120 рублей за килограмм. Но Гиви узнал, что изюм на рынке стоит в 4,5 раза дороже винограда. Для сушки фруктов используются специальные сушилки, где плоды медленно теряют влагу. Купить такую сушилку у семьи Гиви нет возможности, но ее можно взять у соседа на любой срок за 500 рублей.

Гиви собрал 81 килограмм винограда.

А) Посоветуйте Гиви, что выгоднее, продавать виноград или изюм? Известно, что в винограде содержится 80% воды, а в изюме 20% воды по весу.

Б) Сможет ли Гиви купить велосипед, который стоит 14755 рублей в магазине районного центра? Если нет, то, сколько дополнительно предстоит собрать винограда?

Решение:

А) 1) Найдем выручку от продажи винограда $TR = P \cdot Q = 81 \cdot 120 = 9720$ рублей (1 балл)

2) Найдем количество изюма, которое можно получить из 81 кг винограда:

а) сухой остаток в винограде составляет 20%, это $81 \cdot 0,2 = 16,2$ кг

б) найдем вес полученного изюма, если 16,2 веса составляют 80%, то вес изюма равен 20,25 кг (6 баллов).

3) Цена изюма на рынке $P = 120 \cdot 4,5 = 540$ рублей (1 балл)

Найдем прибыль от продажи изюма $\Pi = TR - TC = 20,25 \cdot 540 - 500 = 10935 - 500 = 10435$ рублей. (3 балла) Таким образом, выгоднее продавать изюм.

Б) 5) Гиви не хватит денег на покупку велосипеда. Дополнительно надо заработать $(14755 - 10435) = 4320$ рублей (1 балл)

6) Для этого надо продать еще $(4320/540) = 8$ кг изюма (1 балл)

7) Найдем какое количество винограда предстоит собрать Гиви:

а) сухой остаток в 8 кг изюма составляет 80%, это $8 \cdot 0,8 = 6,4$ кг

б) в винограде 6,4 кг составляют 20%, т.е. вес необходимого винограда равен $(6,4/0,2) = 32$ кг (7 баллов).

Ответ: а) выгоднее продавать изюм; б) Гиви надо дополнительно надо собрать 32 кг винограда.

**Задача 3 "Винни-Пух и все, все, все" (20 баллов).**

Предприимчивый друг Винни-Пуха, Кролик, начал разводить пчел, т.к. не без оснований полагал, что Винни будет постоянным покупателем меда. Но он ошибся, мед с

удовольствием стали покупать и ослик Иа, и Пятачок, покупавшие ранее мед на рынке Чудесного леса.

На прошлой неделе Кролик получил от них заказ на свежий мед. Он погрузил на тележку два бидона с медом общим весом 90 кг (т.е. вес меда + вес бидонов).

Сначала Кролик заехал к Винни-Пуху и продал ему 60% меда, затем доехал до Иа, которому продал 25% от оставшегося меда. Последним свой заказ 24 кг меда выкупил Пятачок.

Весь мед продавался по одной цене. Выручка Кролика составила 32000 рублей.

А) По какой цене продавал мед Кролик?

Б) Тигра посоветовал Кролику изучить рынок меда в Чудесном лесу. Последовав совету, Кролик выяснил, что спрос на мед имеет вид $Q_d = 1500 - 2P$, а предложение $Q_s = 3P - 550$ (где P - цена меда за килограмм, Q - количество меда, кг).

Если Кролик будет продавать мед на рынке в Чудесном лесу, а его друзья вновь покупать мед на рынке, то кто из персонажей сказки Алана Милна получит выгоду и какую? (для простоты будем считать, что объем покупки меда героями сказки так мал, что не меняет функции спроса).

Решение:

А)

1) Допустим X - это вес меда.

Тогда можно составить уравнение $X = 0,6X + (X - 0,6X) \cdot 0,25 + 24$, отсюда $X = 80$ кг **(8 баллов)**

2) Цена меда $P = 32000/80 = 400$ рублей **(1 балл)**

Б)

3) Найдем равновесную цену меда в Чудесном лесу. Для этого приравняем спрос и предложение $1500 - 2P = 3P - 550$, отсюда $P^* = 410$ рублей за кг **(2 балла)**

4) С появлением Кролика на рынке меда изменится предложение. Новая функция предложения имеет вид $Q_s = 3P - 550 + 80 = 3P - 470$ **(4 балла)**

5) Найдем новую равновесную цену меда $1500 - 2P = 3P - 470$, получим $P^*_2 = 394$ рубля за кг **(1 балл)**.

6) Очевидно, что выгоду получают Винни-Пух, Иа и Пятачок, т.к. для них цена станет ниже. Каждый сможет сэкономить на покупке 1 кг меда $(400 - 394) = 6$ рублей. **(1 балл)**

7) Выгода Винни-Пуха составит $6 \cdot 80 \cdot 0,6 = 288$ рублей. **(1 балл)**

Выгода Иа составит $6 \cdot (80 - 48) \cdot 0,25 = 48$ рублей. **(1 балл)**

Выгода Пятачка составит $6 \cdot 24 = 144$ рубля. **(1 балл)**

(* Если участник олимпиады посчитал **только** общую выгоду $80 \cdot 6 = 480$ рублей, то **1 балл**)

Ответ: А) P меда = 400 руб/кг; Б) выгода Винни-Пуха 288 рублей; Иа 48 рублей, Пятачка 144 рубля.

Задача 4 " Чудо остров" (20 баллов).

В 700 км от Бангкока на Восточном побережье Сиамского залива Тихого океана находится остров Чунга-Чанга. Здесь проживает племя Китов. Численность взрослого населения составляет 101 человек (вождь + 100 человек в трудоспособном возрасте). Островитяне ловят рыбу и собирают бананы. Один человек за день может собрать 6 кг бананов или выловить 2 кг рыбы. В соответствии со сложившейся традицией, вождь племени не участвует в производстве продуктов питания.



А) Постройте исходную кривую производственных возможностей (КПВ). Покажите пошагово, как будет меняться положение КПВ в

результате следующих событий произошедших в жизни островитян:

(Постройте на рисунке №1 - исходную КПВ и событие 1, на рисунке №2 - событие 2 и 3, на рисунке №3 - событие 4 и 5. Каждая следующая ситуация строится от предыдущей КПВ).

Событие 1: Ураган сломал часть пальм, теперь в день одному человеку удастся собрать бананов на 25% меньше.

Событие 2: Жители острова научились плести сети для рыбной ловли, теперь один человек может поймать в 1,5 раза больше рыбы.

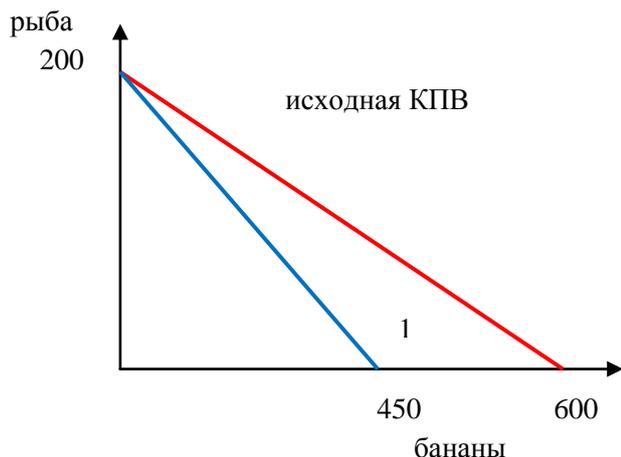
Событие 3: Племя Китов объявило войну племени Акул, проживающему на соседнем острове. Успешные военные действия позволили захватить 10 пленников, которых превратили в рабов. Производительность рабского труда оказалась такой же, как у аборигенов как по бананам, так и по рыбе.

Событие 4: Один из рабов оказался болен, в результате эпидемия неизвестной болезни сократила численность работающих жителей острова на $\frac{2}{5}$ (в том числе рабов).

Событие 5: Племя Китов приручило четыре обезьяны, которые могут собирать бананы, но не могут ловить рыбу. Одна обезьяна собирает 11 кг бананов в день, правда половина из них используется для кормежки самих обезьян **(всего 14 баллов)**.

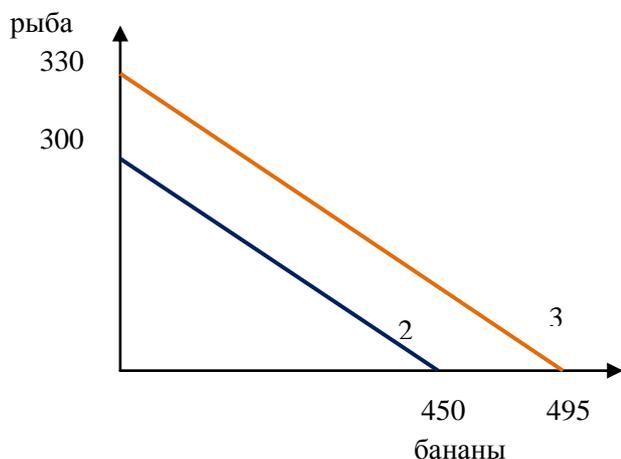
Б) После всех описанных событий, островитяне научились сушить рыбу впрок. Узнав об этом, вождь племени Китов постановил, что ежедневно 20% всей выловленной рыбы надо отдавать лично ему. Хранить бананы долго жители острова не умеют, поэтому собирают бананы только для ежедневного потребления. Кроме взрослых жителей, на острове есть 14 детей. Каждому работающему жителю требуется 2 кг бананов в день, одному ребенку 1 кг, часть бананов уходит на содержание прирученных обезьян, а вождь племени съедает в четыре раза больше бананов, чем работающий абориген. Сколько рыбы приносят туземцы своему вождю каждый день? **(6 баллов)**

Решение:А) Построим КПВ для каждого случая:



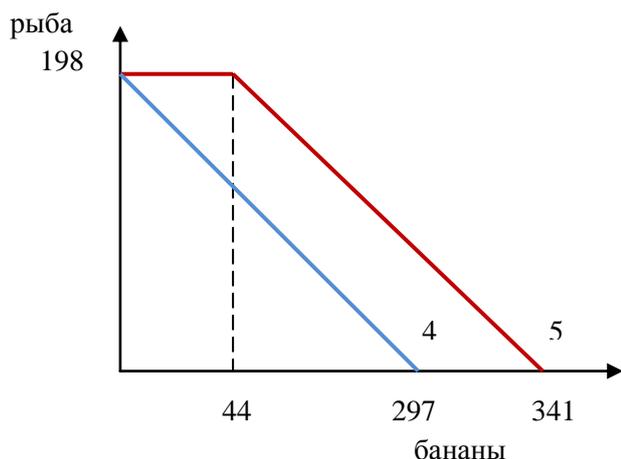
Исходная КПВ: Работающие жители острова соберут за день $100 \cdot 6 = 600$ кг бананов или поймают $100 \cdot 2 = 200$ кг рыбы **(2 балла)**

Событие 1: После урагана один человек сможет собрать за день $6 \cdot 0,75 = 4,5$ кг бананов, а все трудоспособные $100 \cdot 4,5 = 450$ кг **(2 балла)**



Событие 2: Производительность жителя острова составит $2 \cdot 1,5 = 3$ кг рыбы в день. Всего Киты смогут выловить $100 \cdot 3 = 300$ кг рыбы **(2 балла)**

Событие 3: Использование рабского труда увеличит количество собираемых бананов на $10 \cdot 4,5 = 45$ кг в день и достигнет $450 + 45 = 495$ кг



Событие 4: Эпидемия сократила численность жителей острова до $110 \cdot 3/5 = 66$ человек. Теперь максимальное количество бананов $66 \cdot 4,5 = 297$ кг в день, а рыбы $66 \cdot 3 = 198$ кг **(2 балла)**

Событие 5: Обезьяны дополнительно соберут $4 \cdot 11 = 44$ кг бананов в день. Максимально возможное количество бананов равно $297 + 44 = 341$ кг. **(4 балла)**

Б)

1) Найдем необходимое количество бананов для потребления жителями острова в день:

$B_1 = 66 \cdot 2$ (работающие) + $14 \cdot 1$ (дети) + $4 \cdot 5,5$ (обезьяны) + $1 \cdot 4 \cdot 2$ (вождь) = 176 кг **(1 балл)**

2) Из 176 кг бананов 44 соберут обезьяны, а $(176 - 44) = 132$ кг работающие жители острова. И у них останется неиспользованная возможность собрать еще $(297 - 132) = 165$ кг, вместо которых они будут ловить рыбу.

3) Найдем альтернативную стоимость производства 1 кг рыбы

$A.C = 297/198 = 1,5$ кг банана (или $A.C. 1$ кг банана = $2/3$ кг рыбы) **(2 балла)**

4) Определим, сколько рыбы ежедневно могут выловить жители острова:

$P = 165/1,5 = 110$ кг рыбы в день (или $P = 165 * 2/3 = 110$ кг) **(2 балла)**

5) Определим, сколько рыбы (P_B) ежедневно забирает себе вождь:

$P_B = 110 * 0,2 = 22$ кг рыбы кг **(1 балл)**

Ответ: Б) островитяне ежедневно отдают вождю 22 кг рыбы.

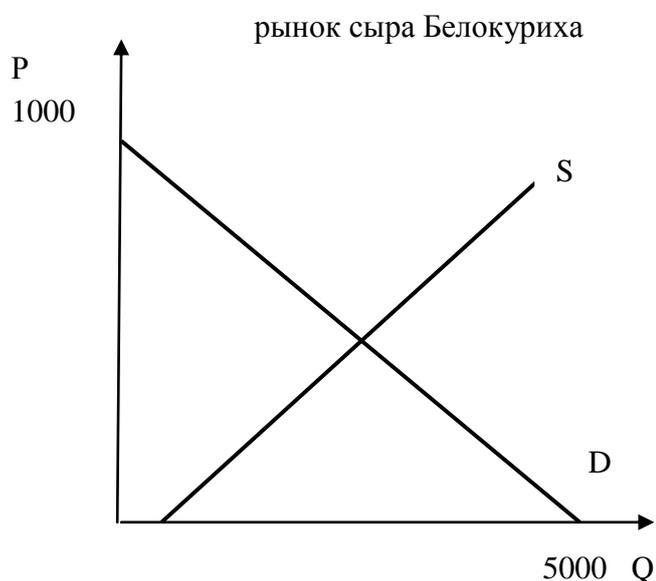


Задача 5 "Алтайские сыровары" (20 баллов)

Традиционным народным промыслом в селе Солоновка на Алтае является производство сыра из козьего и коровьего молока.

Отличительной особенностью этого сыра всегда было высокое качество и оригинальный вкус.

Продавать домашний сыр принято на рынке небольшого курортного городка Белокуриха.



Спрос на сыр и его предложение представлены функциями, которые изображены на графике (где P - цена сыра за килограмм, Q - количество сыра, килограмм в год). Щедрый продавец готов дать попробовать сыр всем потенциальным покупателям, для этого им не жалко 200 кг сыра в год. А если цена сыра вырастет на 20 рублей, то продавцы готовы дополнительно предложить 100 кг сыра.

Марусина бабушка давно живет в Солоновке. Она лучший сыровар в селе, и мечтает передать секрет производства

домашнего сыра своим родным. Наконец-то, Марусины папа и мама отважились переехать в Солоновку и продолжить семейную традицию. Но, поскольку производство сыра должно стать основным источником дохода семьи, решено было построить новую сыроварню. После того, как цех был запущен, предложение сыра в Белокурихе увеличилось на 120% (при каждом уровне цен).

1) Запишите функции спроса и предложения до открытия сыроварни, найдите равновесную цену сыра и объем продаж. **(10 баллов)**

2) Найдите новые равновесные значения цены и объема продаж на рынке домашнего сыра. **(7 баллов)**

3) Изобразите графическую модель рынка сыра в Белокурихе, покажите произошедшие изменения **(3 балла)**

Решение:

1) Запишем функцию спроса на сыр в Белокурихе. Данная функция линейна, т.е. имеет вид $Q_d = aP + b$

а) Составим систему уравнений соответствующих графику спроса:

$$0 = a \cdot 1000 + b; 5000 = a \cdot 0 + b, \text{ отсюда } b = 5000, a = -5,$$

функция спроса имеет вид **$Q_d = -5P + 5000$ (3 балла).**

б) Запишем функцию первоначального предложения, которое имеет вид

$Q_s = aP + b$, где $b = 200$, т.к. это количество сыра продавцы готовы раздать бесплатно, $a = 100/20 = 5$ (это тангенс угла наклона графика предложения к оси P). Таким образом, функция предложения **$Q_s = 5P + 200$ (3 балла)**

в) Найдем равновесные значения на рынке сыра, $Q_d = Q_s$ ($-5P + 5000$) = ($5P + 200$), отсюда **$P^* = 480$ руб/кг, $Q^* = 2600$ кг (2+2 = 4 балла).**

2) После выхода на рынок нового продавца функция предложения будет иметь вид: **$Q'_s = Q_s \cdot 2,2 = (5P + 200) \cdot 2,2 = 11P + 440$ (3 балла);**

Рассчитаем новые равновесные значения $Q_d = Q'_s$ $-5P + 5000 = 11P + 440$, таким образом **$P_2^* = 285$ руб/кг, $Q_2^s = 3575$ кг (2+2 = 4 балла);**

3) Изобразим графическую модель рынка сыра (3 балла)

Ответ: 1) $Q_d = 5000 - 5P$, $Q_s = 5P + 200$; 2) $P_2^* = 285$ руб/кг; $Q_2^s = 3575$ кг.

