

ОЧНЫЙ ОТБОРОЧНЫЙ ТУР. ЗАДАЧИ. РЕШЕБНИК.

для учащихся 10-х классов

Время выполнения 180 минут

Всего за задачи 100 баллов

КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

Решение каждой задачи должно быть выполнено максимально подробно, поскольку итоговая оценка учитывает то, какой процент приведенного решения является верным. Верным должно признаваться любое корректное решение приведенной задачи, независимо от того, насколько оно совпадает с авторским. Более подробные и полные решения оцениваются большим количеством баллов. Если жюри приходит к выводу, что задача скорее решена, чем не решена, то оценка должна быть больше половины от максимально возможной, в противном случае — меньше. Рекомендуется присваивать баллы за каждый шаг в решении задачи. Арифметические ошибки не должны приводить к существенному сокращению баллов, поскольку на олимпиаде, в первую очередь, проверяется не умение хорошо считать, а умение нестандартно мыслить. При наличии ошибки нужно найти ее и снизить балл исходя из степени ее существенности.



Задача 1. Алтайские сыровары (20 баллов). Традиционным народным промыслом в селе Солоновка на Алтае является производство сыра из козьего и коровьего молока. Отличительной особенностью этого сыра всегда было высокое качество и оригинальный вкус. Продавать домашний сыр принято на рынке небольшого курортного городка Белокуриха.

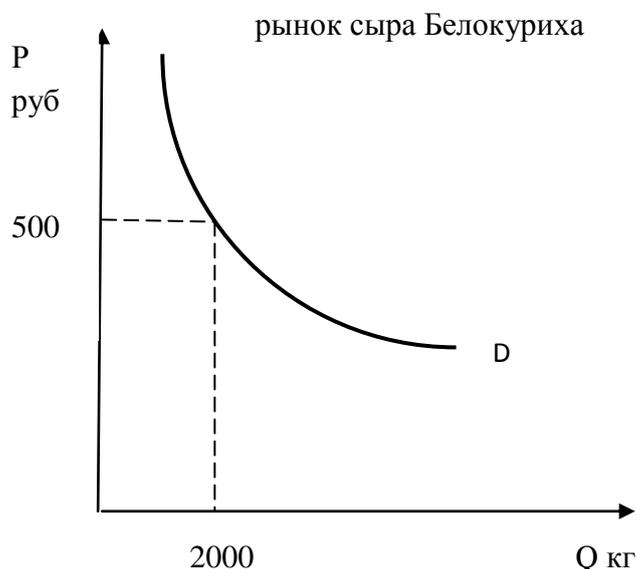
Спрос на сыр здесь представлен функцией вида $Y = a/X^n$, которая схематично изображена на графике. В настоящий момент равновесная цена сыра равна $P = 500$ рублей за килограмм. Предложение сыра (килограмм в год) имеет линейный вид и обладает единичной эластичностью.

Марусина бабушка давно живет в Солоновке. Она лучший сыровар в селе, и мечтает

передать секрет производства домашнего сыра своим родным. Наконец-то, Марусины папа и мама отважились переехать в Солоновку и продолжить семейную традицию. Но, поскольку производство сыра должно стать основным источником дохода семьи, решено было построить новую сыроварню. После того, как цех был запущен, предложение сыра в Белокурихе увеличилось на 300%.

1) Запишите функции спроса и предложения до открытия сыроварни, если известно, что выручка сыроваров не изменилась и после открытия нового цеха. **(11 баллов)**

2) Найдите новые равновесные значения на



рынке домашнего сыра. **(6 баллов)**

3) Постройте графическую модель рынка сыра в Белокурихе. **(3 балла)**

Решение:

1.1) Запишем функцию спроса на сыр в Белокурихе.

1.2) Данная функция имеет вид $Q_d = a/P^n$

а) заметим, что эта функция обладает единичной эластичностью, т.к. по условию, выручка продавцов не изменилась после открытия новой сыроварни, таким образом, $n = 1$.

б) составим уравнение соответствующее графику:

$2000 = a/500$, отсюда $a = 1000000$. Функция спроса имеет вид: $Q_d = 1000000/P$ **(8 баллов)**.

1.3) Запишем функцию первоначального предложения, которая имеет вид:

$$Q_s = aP \text{ (по условию } E_s=1)$$

Подставим равновесные значения: $2000 = a*500$, следовательно, $a = 4$, а функция предложения $Q_s = 4P$ **(3 балла)**

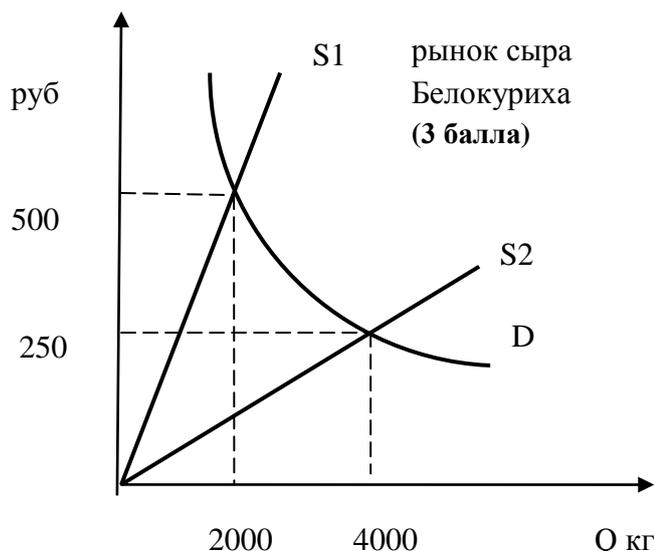
2) После выхода на рынок нового продавца функция предложения будет иметь вид: $Q'_s = Q_s*4 = 4P*4 = 16P$ **(2 балла)**

Рассчитаем новые равновесные значения $Q_d = Q'_s$

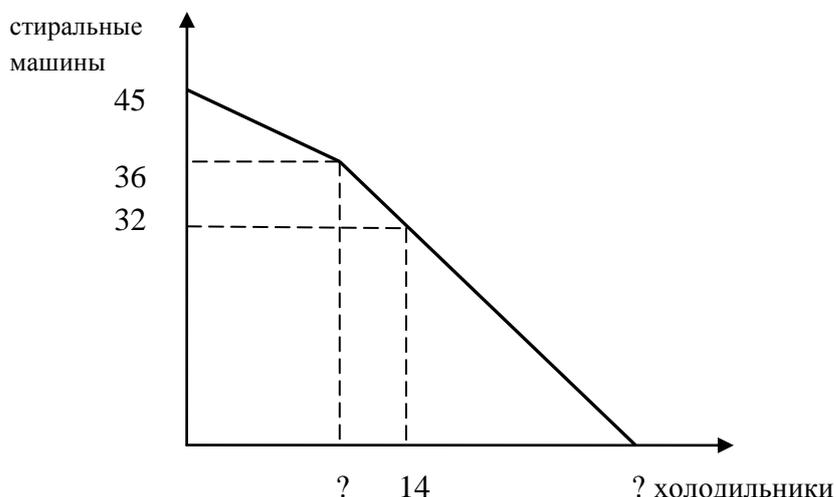
$1000000/P = 16P$, отсюда $P_2^* = 250$ руб/кг, $Q_2^s = 4000$ кг **(2+2 = 4 балла)**

3) Построим равновесную модель рынка сыра в Белокурихе.

Ответ: 1) $Q_d = 1000000/P$, $Q_s = 4P$; 2) $P_2^* = 250$ руб/кг $Q_2^s = 4000$ кг.



Задача 2. РемБытТехника (20 баллов)



В небольшой мастерской по ремонту промышленных холодильников и стиральных машин работают два мастера Данила и Семён. Данила может отремонтировать в месяц 30 холодильников или 30 стиральных машин. Семён ремонтирует за месяц 20 холодильников или 15 стиральных машин. Но, возможности мастерской принимать в ремонт технику зависят не только от квалификации мастеров,

но и от размеров производственных площадей, на которых мастера могут вести ремонт техники. Например, для ремонта и хранения одного холодильника требуется 2 м² площади. Ниже показана кривая производственных возможностей мастерской (КПВ)

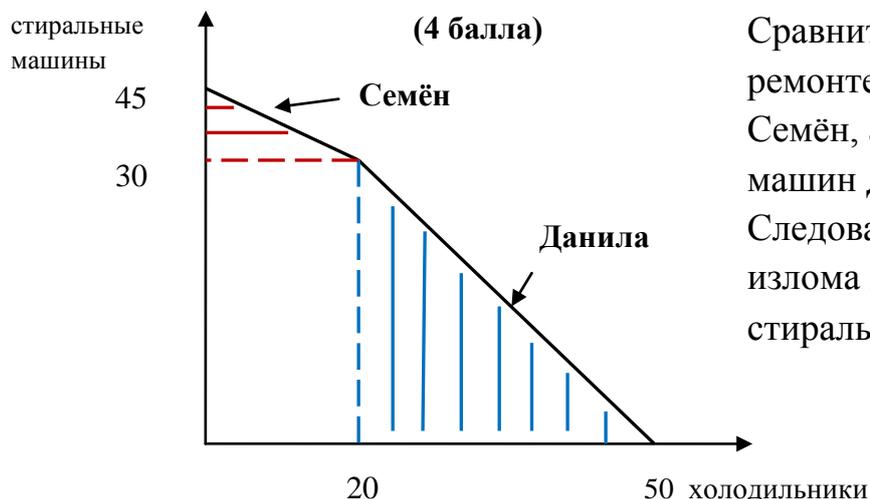
А) Определите производственную площадь мастерской. **(17 баллов)**

Б) Оцените, сможет ли мастерская принять заказ от гипермаркета "Гигант" на ремонт 20 промышленных холодильников и 25 стиральных машин? **(3 балла)**

Решение:

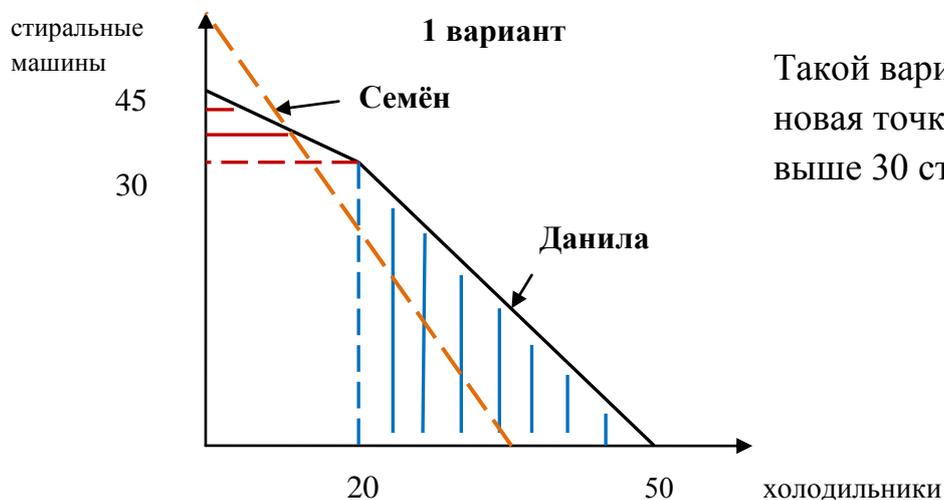
А) 1) Построим КПВ мастерской **без учета** ограничения по производственной площади.

	Ремонт за месяц (шт)		Альтернативная стоимость	
	холодильники	стиральные машины	1 холодильника	1 стиральной машины
Данила	30	30	1 стир. маш.	1 холодильника
Семен	20	15	0,75 стир. маш.	4/3 холодильника

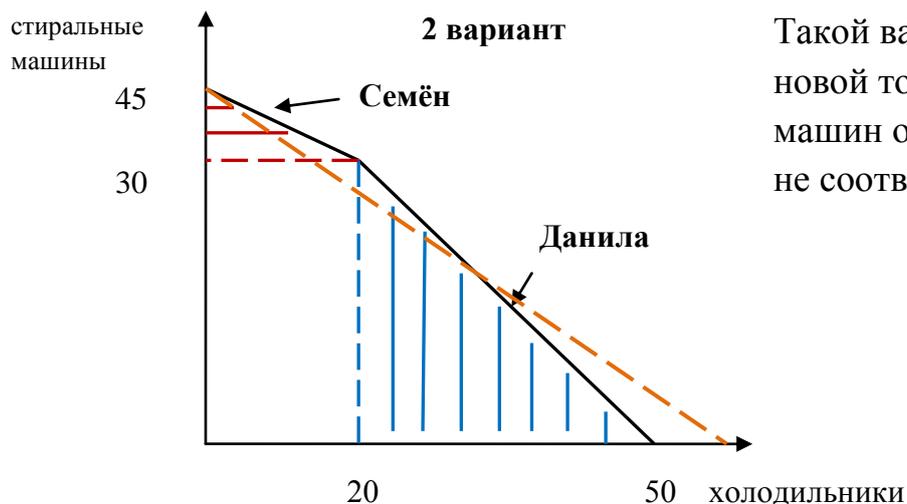


Сравнительное преимущество в ремонте холодильников имеет Семён, а в ремонте стиральных машин Данила. Следовательно, координаты точки излома 20 холодильников и 30 стиральных машин

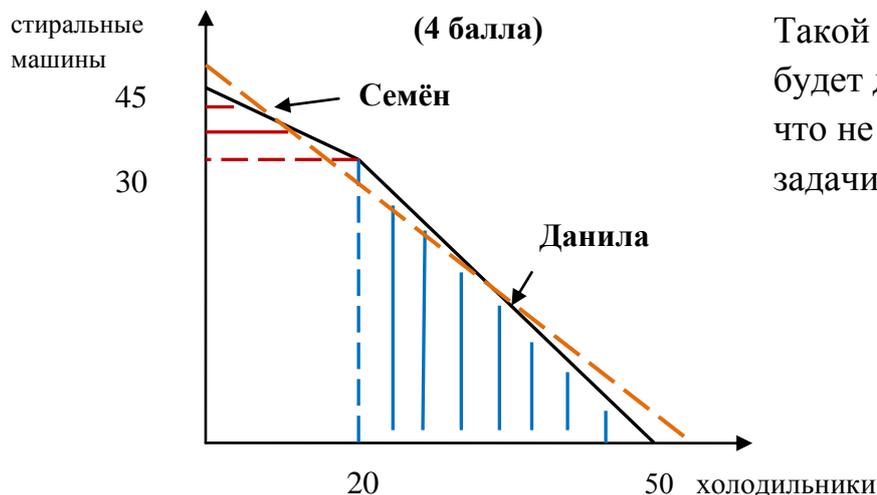
2) а) рассмотрим возможные варианты ограничения по производственной площади мастерской:



Такой вариант возможен, т.к. новая точка излома окажется выше 30 стиральных машин.



Такой вариант не возможен, т.к. в новой точке излома стиральных машин окажется меньше 30, что не соответствует условию задачи



Такой вариант не возможен, т.к. будет две новых точки излома, что не соответствует условию задачи

Заметим, что ограниченность производственных площадей мастерской приводит к тому, что невозможно одновременно отремонтировать за месяц 20 холодильников и 30 стиральных машин. Значит координата 36 стиральных машин (см. КПВ в условии задачи) принадлежит ограничению по площади мастерской.

Таким образом, линия ограничения по производственной площади мастерской может пройти только так, как в варианте №1 (6 баллов, т.е. по 2 балла за каждый рассмотренный вариант. За недостаточно полное обоснования до 3-х баллов)

б) Найдем количество холодильников, соответствующее ремонту 36 стиральных машин. Для этого запишем функцию верхнего участка КПВ, которая имеет линейный вид $Y = b - aX$, где, $b = 45$ (максимальное количество стиральных машин), $a = 0,75$ (альтернативная стоимость Семена в ремонте 1 холодильника).

Т.е. функция верхнего участка КПВ **Стир. Маш. = 45 - 0,75 Хол.**

Подставим в эту функцию известное нам значение: $36 = 45 - 0,75 \text{ Хол}$, получим **Хол = 12 (3 балла).**

в) Нижний участок заданной в условии КПВ принадлежит ограничению по производственной площади мастерской, т.к. координата 32 стиральные машины оказалась ниже точки излома КПВ. Запишем его функцию, она линейна, мы имеем две координаты этой функции.

Составим и решим систему уравнений:

$$36 = a12 + b$$

$$32 = a14 + b$$

отсюда $a = -2$, $b = 60$, ограничение имеет вид **Стир. Маш. = 60 - 2Хол.** Максимальное количество стиральных машин, которое может поместиться в мастерской равно 60 (**1 балл**).

г) Найдем площадь мастерской. Максимальное количество холодильников, которое может вместить мастерская $0 = 60 - 2\text{Хол}$, т.е. равно 30. Ремонт одного холодильника требует 2 м^2 площади, следовательно **$S = 30 \cdot 2 = 60 \text{ м}^2$ (3 балла).**

(*** можно сразу после п.а) найти производственную площадь мастерской. Нижний участок КПВ соответствует ограничению по площади, альтернативная стоимость на этом участке.

1 Стир. Маш. = 0,5 холодильника, т.е. для ремонта стиральной машины требуется 1 м² площади.

Тогда площадь мастерской $S = 36*1 + 12*2 = 60$ м² (7 баллов).

Б) Проверим, сможет ли мастерская выполнить заказ гипермаркета "Гигант", отремонтировать 25 стиральных машин и 20 холодильников. Подставим в функцию нижней части КПВ, например, 20 холодильников, т.е.

Стир. Маш. = $60 - 2*20 = 20$. Невозможно выполнить заказ гипермаркета. (3 балла)

Ответ: А) Производственная площадь мастерской 60 м²; Б) Мастерская не сможет выполнить заказ гипермаркета "Гигант".

Задача 3. О пользе змеиного яда (20 баллов)



Лиза живет в городке Змеиногорске Алтайского края, но на каникулах часто приезжает к бабушке в деревню. Бабушка Лизы знаменитая знахарка. В семье принято передавать секреты приготовления различных снадобий через поколение по женской линии, т.е. от бабушки к внучке. Прошлым летом Лиза научилась варить обезболивающее снадобье и все необходимые компоненты для его приготовления (снадобье годится только для наружного применения). В его составе "живая" вода и змеиный яд.

Издержки производства "живой" воды $ТС = 25Q^2$ (где Q - количество флаконов по 50 мл), а змеиного яда $ТС = 3200Q + 400$ (где Q - количество флаконов по 50 мл).

Лиза назвала снадобье "Бальзам безболин", концентрация змеиного яда в бальзаме составляет 40%. (технология производства бальзама такова, что процесс нельзя прервать, пока не будет получен конечный продукт).

Лиза провела маркетинговое исследование рынка и выяснила, что в Змеиногорске нет аналогов такого бальзама. За первую неделю была продана пробная партия из 30 флаконов по 50 мл по цене P1. Во второй партии было уже 150 таких же флаконов бальзама. Чтобы продать весь продукт за неделю, Лизе пришлось снизить цену до P2, но ее выручка при этом не изменилась. Методом проб и ошибок Лиза выяснила, что получить выручку больше, чем 162000 рублей в неделю не удастся.

1. Помогите Лизе определить, сколько бальзама надо производить и по какой цене продавать, чтобы она могла получить максимальную прибыль, если спрос имеет линейный вид.
2. Какую максимальную прибыль за неделю может получить Лиза?

Решение:

1) Запишем функцию издержек приготовления бальзама:

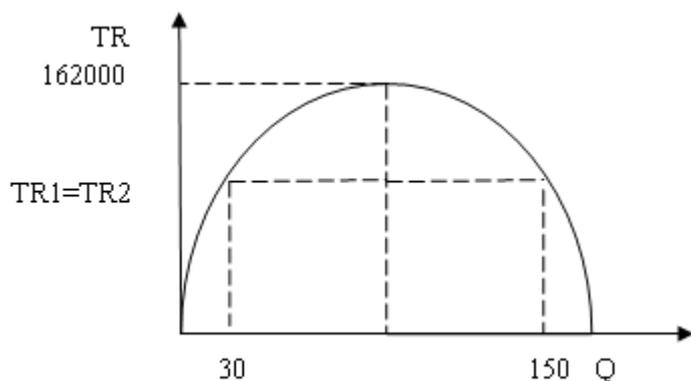
$$ТС = 25(Q*0,6)^2 + 3200Q*0,4 + 400 = 9Q^2 + 1280Q + 400 \text{ (7 баллов)}$$

2) Нам понадобится функция МС, поскольку Лиза монополист на данном рынке.

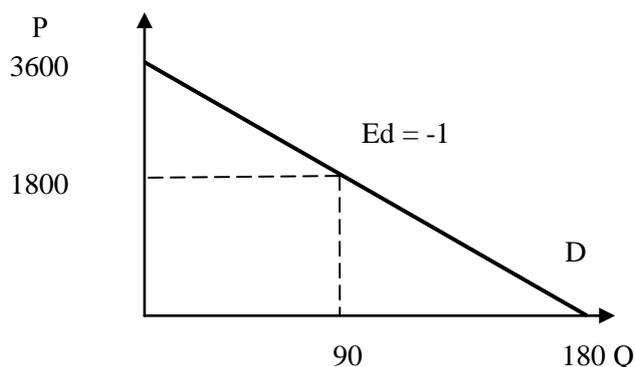
$$МС = (ТС)' = (9Q^2 + 1280Q + 400)' = 18Q + 1280 \text{ (2 балла)}$$

3) Найдем цену, при которой выручка максимальна. Для линейной функции спроса выручка имеет вид $TR = -aQ^2 + b$, т.е. это парабола, выходящая из начала координат. Выручка достигает максимума при $Q = (Q1 + Q2)/2 = (30 + 150)/2 = 90$

$$P = TR/Q = 162000/90 = 1800 \text{ рублей.}$$



4) Запишем функцию спроса на бальзам.



Выручка достигает максимума при единичной эластичности спроса, т.е. ровно в середине графика спроса.

Тогда максимальное значение количества $Q_{\max} = 90 \cdot 2 = 180$.

Линейный спрос имеет вид

$$Q_d = -aP + b, \text{ где } b = 180,$$

$$a = -90/1800 = -0,05$$

$$\text{Т.о. } Q_d = 180 - 0,05P \text{ (4 балла)}$$

5) Запишем функцию $MR = (TR)'$ (1 балл)

$$\text{Обратная функция спроса } P = 3600 - 20Q, TR = 3600Q - 20Q^2,$$

$$MR = (3600Q - 20Q^2)' = 3600 - 40Q$$

6) Найдем оптимальный объем производства бальзама и рыночную цену, для этого $MR = MC$, $3600 - 40Q = 18Q + 1280$, отсюда $Q^* = 40$ флаконов,

$$P^* = 2800 \text{ рублей. (3 балла)}$$

7) Найдем прибыль, которую может получить Лиза:

$$TR = P^*Q = 2800 \cdot 40 = 112000 \text{ (1 балл)}$$

$$TC = 9 \cdot 40^2 + 1280 \cdot 40 + 400 = 66000 \text{ (1 балл)}$$

$$\Pi = TR - TC = 112000 - 66000 = 46000 \text{ (1 балл)}$$

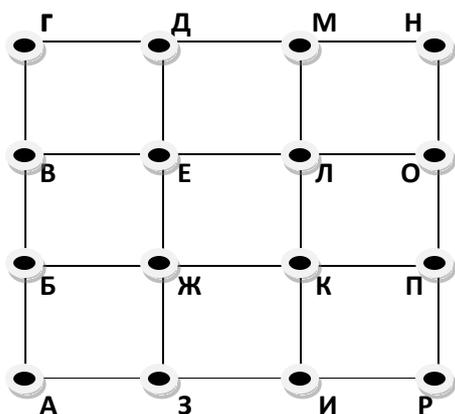
Ответ: $Q^* = 40$ флаконов, $P^* = 2800$ рублей, прибыль от продажи бальзама составит 46000 рублей в неделю.

Задача 4 "Центральный квартал" (20 баллов)

Жители коттеджного поселка "Центральный квартал" готовы потратить на обновление дорожной разметки 50 тысяч рублей. Площадь поселка представляет собой квадрат 3×3 км, состоящий из кварталов площадью 1×1 км (см план поселка). Вокруг каждого квартала проложена дорога, нуждающаяся в обновлении разметки.

Для выполнения этой работы пригласили Иннокентия, т.к. он обладает достаточным опытом и имеет в своем распоряжении необходимую дорожную технику.

ПЛАН ПОСЕЛКА



Все расходы по нанесению разметки Иннокентий берет на себя. Известно что затраты на 1 км разметки (в том числе расходы на краску) составляют 900 рублей. Кроме того, расходы на дизельное топливо для спецтехники составляют 100 рублей на 1 км и они не зависят от того наносится в этот момент разметка или нет.

Кеша плохо ориентируется в поселке, поэтому ему необходима помощь в разработке маршрута, при котором он получит максимальную прибыль.

1) Помогите ему и опишите подробно маршрут (т.е. последовательно каждый км пути, например А- Б -Ж- З - А - Б - В и т.д., для данного примера расходы составят $(5 \cdot 900 + 6 \cdot 100) = 5100$ рублей).

2) Укажите, какое количество "холостых ходов" он совершил (возвратов).

3) Рассчитайте, какую прибыль сможет получить Иннокентий?

4) Попробуйте обосновать, какое минимальное количество "холостых ходов" сделает Иннокентий (**бонус до 5 баллов**)

Решение:

1) Вариантов оптимального движения может быть несколько. Рассмотрим два из них:

- Б → А → З → И → Р → П → К → Ж → Б → В → Е → Л → О → П → О → Н → М → Л → К → Ж → Е → Д → М → Д → Г → В
- Б → Ж → Е → Д → Г → В → Е → Л → М → Д → М → Н → О → Л → К → П → О → П → Р → И → К → Ж → З → И → З → А → Б → В (выделены возвратные движения без нанесения разметки)

При оптимальном маршруте только 3 раза будет движение спецтехники без нанесения разметки.

2) Рассчитаем расходы на нанесение разметки: $C_1 = 24 \cdot (900 + 100) = 24000$ руб.

Расходы на движение без нанесения разметки $C_2 = 100 \cdot 3 = 300$ руб.

Всего расходы составят $C = 24000 + 300 = 24300$ руб.

3) Найдем прибыль Иннокентия: $\Pi = 50000 - 24300 = 25700$ рублей.

4) **Возможно обоснование того, что минимальное количество "холостых" движений равно 3:** Заметим, что из восьми перекрестков выходит нечетное количество дорог (по три дороги): Б, В, Д, М, О, П, И, З.

Кроме того, если начать движение из одного из них, то шесть из них не будут являться началом/концом пути. Значит, т.к. количество входов и выходов в такие перекрестки должны совпадать, у каждого из шести точно есть одна дорога, по которой придется пройти дважды. Дорога соединяет не больше двух перекрестков, поэтому дорог, по

XXIV Межрегиональный экономический фестиваль школьников «Сибиряда. Шаг в мечту» 22.01.2017
которым придется пройти дважды, не меньше трех (каждая является дополнительным входом/выходом для двух перекрестков). Таким образом, невозможно дважды пройти по менее, чем трем дорогам. **(бонус до 5 баллов)**

Ответ: 2) минимальное количество "холостых ходов" 3, 3) прибыль составит 25700 рублей.

Критерии оценивания:

За нахождение оптимального маршрута 18 баллов, при трехкратном движении техники без нанесения разметки.

За каждое дополнительное (возвратное) движение без нанесения разметки (-3) балла. Например, 4 "холостых хода", то оценка за маршрут составит $(18 - 3) = 15$ баллов.

Правильный расчет затрат в соответствии с построенным маршрутом 1 балл

Расчет прибыли 1 балл.

За правильное обоснование количества "холостых ходов" бонус 5 баллов, попытка обоснования количества возвратов может быть оценена от 1 до 4 баллов.

Задача 5 "В здоровом теле – здоровый дух" (20 баллов)

Жители Маленького Островного Королевства (далее МОК) привыкли заботиться о своем здоровье. Доброй традицией является ежегодное прохождение диспансеризации. На острове 20 конкурирующих между собой поликлиник, которые платно оказывают услуги диспансеризации. Затраты одной поликлиники заданы функцией $TC = 5n^2 - 650n$, где n - количество жителей ($n > 65$),

при этом $n = (x + y)$, где x - количество пенсионеров, y - количество не пенсионеров (остальных граждан), которых обслуживает **одна** поликлиника.

Но, к сожалению, не все граждане МОК могут себе позволить ежегодную диспансеризацию, т.к. экономика характеризуется значительным неравенством в распределении доходов.

Спрос пенсионеров на услугу задан функцией $P_x = 250 - 0,5N_x$ (где N_x - количество пенсионеров на острове). Спрос остальных жителей задается $P_y = 1000 - 0,5N_y$ (где N_y - количество остальных жителей острова).

А) Найдите цену за услуги диспансеризации, которая сложилась на рынке МОК. Сколько пенсионеров и остальных жителей проходят ежегодную диспансеризацию? Постройте графическую модель рынка **(12 баллов)**.

Б) Правительство поручило экономистам разработать программу государственной поддержки здравоохранения, т.к. диспансеризация имеет положительный внешний эффект. Экономисты учли внешний эффект в функции спроса на диспансеризацию со стороны правительства МОК. По их оценкам интересам государства соответствует спрос $N_{x+y} = 2500 - 2,8P_g$ (где N_{x+y} и P_g - параметры равновесия рынка). Сколько островитян должны проходить диспансеризацию с точки зрения правительства? Покажите новое равновесие на графической модели рынка из пункта А **(3 балла)**.

В) Правительство острова, заботясь о здоровье пенсионеров, выделяет субсидии поликлиникам (!), благодаря которым, больше граждан имеющих пенсионное

удостоверение может проверить свое здоровье. Какой размер субсидии должно выделить правительство для граждан с пенсионным удостоверением, чтобы достичь равновесия с точки зрения государства (**5 баллов**)?

Решение:

А)

1) Запишем функцию предложения одной поликлиники $MC = 10n - 650$, перейдем к обратной функции $n_s = 0,1P + 65$ (**3 балла**)

2) Запишем функцию предложения 20 поликлиник

$$N_s = n_s * 20 = (0,1P + 65) * 20 = 2P + 1300 \text{ (1 балл)}$$

3) Запишем функцию рыночного спроса на услугу диспансеризации:

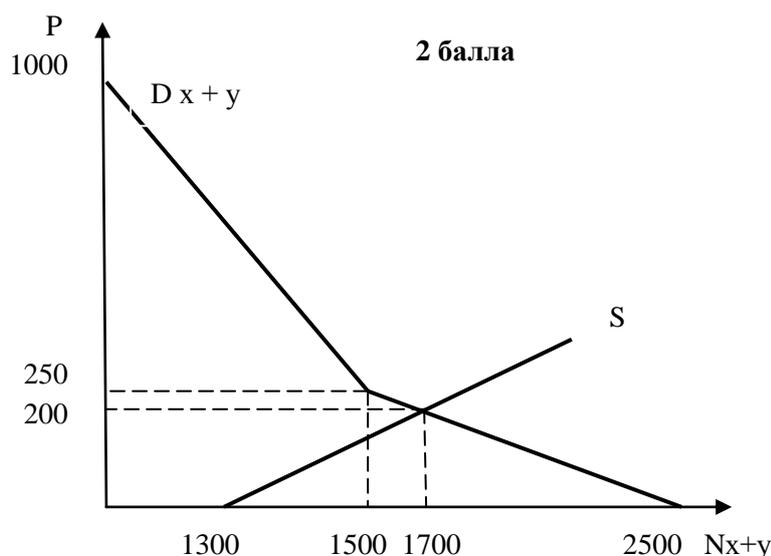
а) перейдем от обратных функций спроса к прямым:

$$N_x = 500 - 2P \text{ (пенсионеры)}, N_y = 2000 - 2P \text{ (остальные)}$$

б) рыночный спрос имеет вид:

$$250 < P \leq 1000, N_{dx+y} = 2000 - 2P, P \leq 250, N_{dx+y} = 2500 - 4P \text{ (3 балла)}$$

3) Построим графическую модель и найдем параметры частного равновесия:



Приравняем функцию рыночного спроса и предложения:

$$2500 - 4P = 2P + 1300, \text{ отсюда}$$

$$P^* = 200, N^*_{x+y} = 1700 \text{ человек. (1 балл)}$$

4) Найдем количество пенсионеров и остальных жителей, которые проходят ежегодную диспансеризацию:

$$N_x = 500 - 2 * 200 = 100 \text{ человек (пенсионеры) (1 балл)}$$

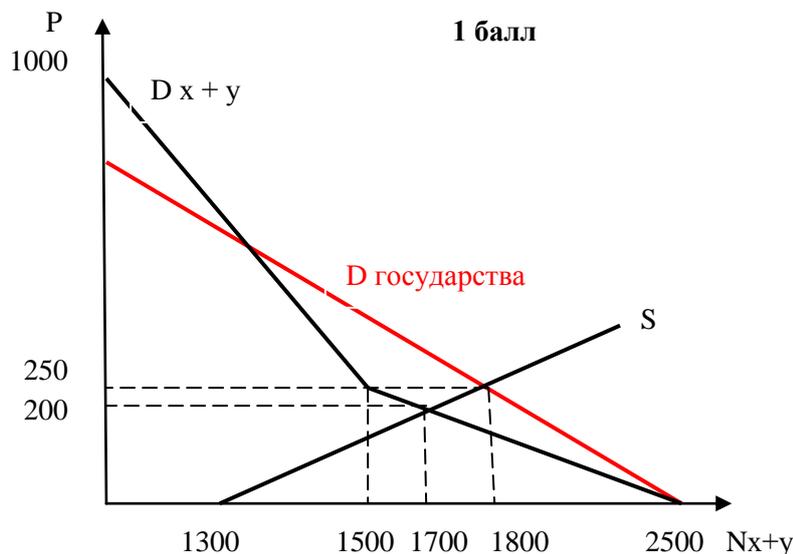
$$N_y = 2000 - 2 * 200 = 1600 \text{ человек (остальные) (1 балл)}$$

Б) 5) Найдем параметры равновесия с учетом интересов государства, приравняем функцию спроса государства и предложения поликлиник:

$$2500 - 2,8P_g = 2P + 1300, \text{ отсюда}$$

$$P_{g^*} = 250, N^*_{x+y} = 1800 \text{ человек. (2 балла)}$$

Таким образом, правительство заинтересовано, чтобы 1800 островитян проходили ежегодную диспансеризацию.



В)

6) Заметим, что при цене $P_g = 250$, ни один пенсионер не может себе позволить проходить диспансеризацию $N_x = 500 - 2 \cdot 250 = 0$.

7) Определим, сколько остальных граждан может себе позволить проходить диспансеризацию: $N_y = 2000 - 2 \cdot 250 = 1500$ человек.

8) Следовательно, государство должно выделить субсидии $(1800 - 1500) = 300$ пенсионерам, чтобы было достигнуто желаемое равновесие **(2 балла)**

9) Но, чтобы 300 пенсионеров прошли диспансеризацию, цена в поликлинике для них должна быть $P_x = 250 - 0,5 \cdot 300 = 100$ у.е., остальное компенсирует государство.

10) Размер субсидии равен $s = (P_{общ} - P_x) = 250 - 100 = 150$ у.е. **(2 балла)**

Всего необходимо выделить поликлиникам $S = 150 \cdot 300 = 45000$ у.е. **(1 балл)**

Ответ: а) $P = 20$ у.е., $N_x = 100$, $N_y = 1600$ б) $N_{x+y} = 1800$ в) $s = 150$ у.е., $S = 45000$ у.е.