XXIII Межрегиональный экономический фестиваль школьников «Сибириада. Шаг в мечту».
Олимпиада по экономике для учащихся 9-х классов 17.01.2016.
ОТБОРОЧНЫЙ ТУР. ЗАДАЧИ.

Всего за задачи 100 баллов **Время выполнения 180 минут**

КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

Решение каждой задачи должно быть выполнено максимально подробно, поскольку итоговая оценка учитывает то, какой процент приведенного решения является верным. Верным должно признаваться любое корректное решение приведенной задачи, независимо от того, насколько оно совпадает с авторским. Более подробные и полные решения оцениваются большим количеством баллов. Если жюри приходит к выводу, что задача скорее решена, чем не решена, то оценка должна быть больше половины от максимально возможной, в противном случае — меньше. Рекомендуется присваивать баллы за каждый шаг в решении задачи.
Арифметические ошибки не должны приводить к существенному сокращению баллов, поскольку на олимпиаде, в первую очередь, проверяется не умение хорошо считать, а умение нестандартно мыслить. При наличии ошибки нужно найти ее и снизить балл исходя из степени ее существенности.

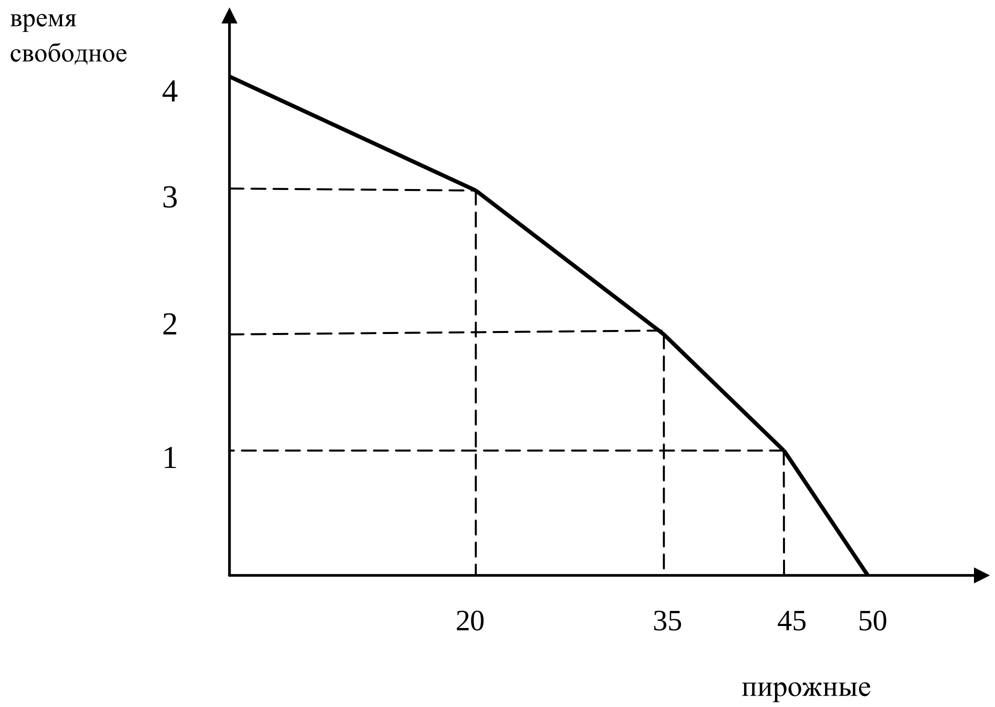
Задача 1 (20 баллов) "Пирожные + математика"
У Юли сегодня день рождения, к ней через 4 часа придут друзья. Юля может испечь пирожные, а может ничего не делать, т.к. мама уже приготовила угощение.
Если Юля потратит на выпечку пирожных один час, то приготовит 20 штук, за второй час можно успеть приготовить еще 15 пирожных, за третий час Юля сделает дополнительно 10 пирожных, за четвертый час испечет только 5 штук.
А) Постройте кривую производственных возможностей (КПВ) Юли в координатах "свободное время - пирожные". **(13 баллов)**
Б) Юля решила испечь 25 пирожных и сделать домашнее задание по математике. Сколько задач успеет решить Юля до прихода гостей, если на одну задачу она тратит 20 минут и после того, как решит 5 задач, делает 20-минутный перерыв для отдыха? **(7 баллов)**
Решение:

А) 1) На осях КПВ должны находятся альтернативные варианты, т.е. "пирожные - время отдыха **(2 балла)**
2) Составим таблицу альтернативных вариантов :

	Возможные альтернативы				
Свободное время	4 часа	3 часа	2 часа	1 часа	0 часов
Пирожные	0	20	35	45	50

(за каждую найденную правильно альтернативу 2 балла, т.е. всего **10 баллов**)

3) Построим КПВ по данным таблицы **(3 баллов)**



Б) 1) Найдем время, которое потребуется Юле, чтобы сделать 25 пирожных: за первый час она испечет 20 штук, за второй час ей надо приготовить еще 5 пирожных. На одно пирожное в этот час Юля тратит 60/15 = 4 минуты, следовательно, 5 штук будут готовы через 20 минут. Всего на выпечку потрачено (60 + 20) = 80 минут. **(4 балла)**
2) До прихода гостей 4*60 = 240 минут, следовательно, на решение задач осталось (240 - 80) = 160 минут **(1 балл).**
3) Первые 5 задач она решит за 5*20 = 100 минут, затем сделает перерыв 20 минут, а за оставшиеся 40 минут решит полностью еще 2 задачи. Всего Юля сделает (5 +2) = 7 задач по математике **(2 балла).**
Ответ: Б) до прихода гостей Юля решит 7 задач по математике.

Задача 2 (20 баллов) "Во саду ли, в огороде "
Чудо- чудное - под елкой белка песенки поет и грызет золотые орешки с изумрудными ядрышками.
Любопытствующие могут сами угостить белку орешками. Орешки продаются тут же в сувенирных лавках. Спрос на орешки имеет вид Qd = 90-10P, а предложение продавцов Qs = 5P - 15 (где P - цена изумрудного орешка, у.е., Q - количество орешков, тыс. шт.).
Министр экономики установил минимальную цену (выше равновесной), дешевле которой, орешки не могут продаваться. Министр предполагал, что тогда вырастет выручка продавцов и можно будет, наконец-то, ввести налог на доходы от продажи орешков. Однако, в результате таких действий выручка от продажи орешков сократилась на 60 у.е.
А) Найдите равновесные значения P и Q на рынке орешков **(4 балла).**
Б) Найдите уровень, на котором был установлен предел цены **(8 баллов).**
В) Найдите объем продаж орешков после установления предела цен **(2 балла).**

Г) Постройте графическую модель рынка орешков, выделите площадь фигуры соответствующей выручки продавцов после установления предела цены **(6 баллов).**

Решение:

А) 1) Найдем равновесные параметры на рынке орешков, для этого приравняем функции спроса и предложения: Qd= Qs; 90-10P = 5P - 15, отсюда **P* = 7 у.е., Q* = 20 тыс. шт. (2 + 2 = 4 балла)**

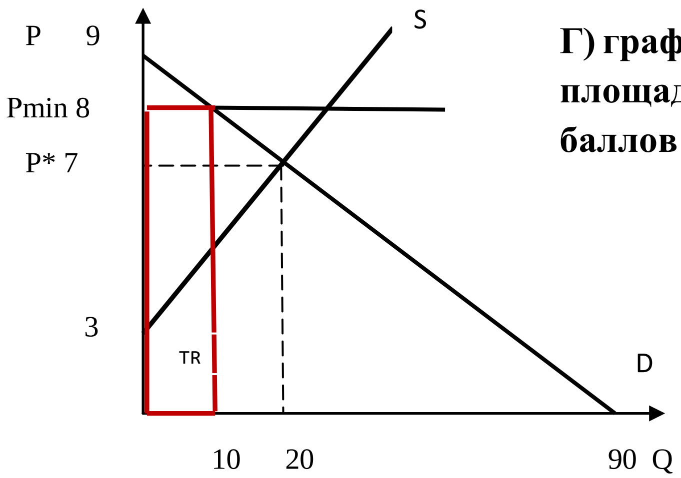
Б) 2) Найдем выручку продавцов: TR1 = P*Q; TR1 = 7*20 = 140 у.е. **(1 балл)**

3) Найдем новую выручку продавцов:TR2 = (TR1 - 60)= (140 - 60) = 80 у.е. **(1 балл)**

4) Новую выручку продавцов можно представить как TR2 = P*Q = (90 - 10P)*P = 90P - $10P^2$.

Решим уравнение: $90P - 10P^2 = 80$, отсюда Pmin = 8 (Pmin = 1 не подходит, т.к. цена должная быть выше равновесной) **(6 баллов).**

В) 5) Найдем объем продаж после установления нижней границы цены: TR2 = P*Q, отсюда Q = TR2/P =80/8 = 10 штук **(2 балла).**



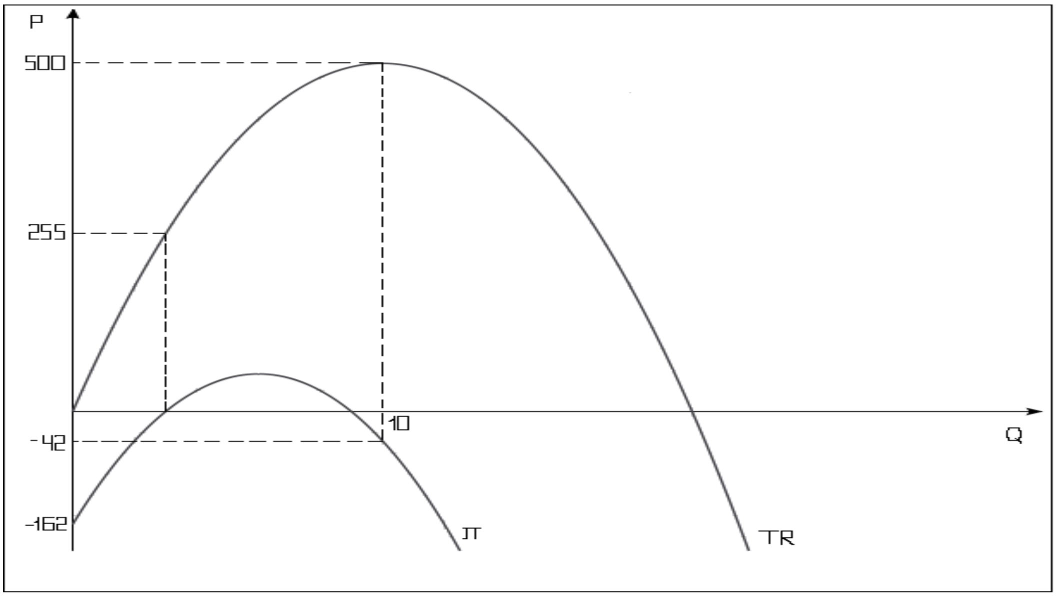
Г) графическая модель 4 + площадь выручки 2 =6 баллов

Ответ: а) равновесие на рынке орешков P* = 7 у. е, Q* = 20 тыс. шт.; б) минимальный предел цены Pmin = 8 у. е.; в) объем продаж составил 10 тыс. орешков.

Задача 3 (20 баллов) "Крепкий орешек - 9"

Орешки для белочки производит фирма "Крепкий орешек". На рисунке представлены графики (параболы) выручки и прибыли фирмы. (TR - выручка, тыс. рублей, Q-выпуск орешков, тыс. шт., π - прибыль, тыс. руб.) Известно, что фирма максимизирует прибыль.

Найдите оптимальный объем производства орешков, цену и прибыль фирмы "Крепкий орешек"



Решение:

А) Запишем уравнение функции выручки:

1. Пусть $TR=aq^2+bq+c$. Известны две точки функции: точка начала координат (0;0) и вершина (10;500).
2. Т.к. график проходит через точку (0;0), то $a*0^2+b*0+c=0$. Из этого делаем вывод, что c=0. И уравнение имеет вид aq^2+bq.
3. Т.к. график проходит через точку (10;500), то $a*(10)^2+b*10=500$, поэтому 10a+b=50. Значит b=50-10a.
4. Т.к. парабола симметрична относительно оси, проходящей через ее центр, то вторая точка пересечения графика функции выручки с осью OX 10*2=20, т.е. точка имеет координаты (20;0).
5. Т.к. график проходит через точку (20;0), то $a*(20)^2+b*20=0$, поэтому 20a+b=0. Значит b= -20a.
6. Приравняв значения b из пунктов (3) и (5), получим что 50-10a= -20a. Поэтому, a= -5. Тогда b= -20*(-5)=100 и **TR= 100q - 5q^2 (6 баллов)**

Б) Запишем функцию прибыли и найдем ее максимум:

7. Рассчитаем точку пересечения графика функции прибыли с осью OX. Обозначим эту точку q_0. Известно, что TR (q_0) = 255, тогда $-5*(q_0)^2+100*q_0=255$, получим два корня q=3 и q=17, q=17 – посторонний корень, т.к. из графика видно, что q_0 <10.
8. По трем точкам (0;-162) (3;0), (10;-42), запишем функцию прибыли (аналогично п. А): **π= -6q^2+72q-162 (6 баллов);**
9. Т.к. функция прибыли – парабола, то ее максимум достигается в вершине, **q**=(-72)/2(-6)=**6 (4 балла); π**(6)=$-6*(6)^2$+72*6-162=54 **(2 балла).**

В) Найдем цену орешков:

10. Известно, что TR=p*q. Также известно, что $TR=-5q^2+100q$=q(100-5q). Тогда p=100-5q. Из пункта (9) известно, что оптимальный объем производства q=6. **P**(6)=100-5*6=**70 (2 балла).**

Ответ: P=70; Q=6; π=54.

Задача 4 (20 баллов) "Финансовая грамота"

Уважаемые участники олимпиады, при решении задачи используйте, пожалуйста, следующие обозначения:

i - банковская процентная ставка по вкладам (%)
I - доход по вкладу в банке (тыс. руб.)
R - рента (арендная плата) за пользование участком земли (тыс руб)
r - рента с одного фермерского хозяйства (тыс. руб.)
Рз - цена земельного участка (тыс. руб.)

В 2010 году студентка экономического факультета Лиза Р. получила в наследство 500 тыс рублей. Из школьного курса финансовой грамотности она твердо усвоила, что "деньги должны работать", поэтому рассмотрела два варианта использования денег:
1 вариант: положить все деньги в банк под проценты. Самая высокая ставка процента по вкладам (i) оказалась в "Плюсбанке".
2 вариант: на всю сумму наследства купить участок земли, разделить его на 5 равных частей и сдать в аренду 5 фермерам. Годовая рента (r), которую могла получить Лиза с одного фермерского хозяйства, составляла в 2010 году 15 тыс. рублей.
После некоторых раздумий, она купила участок земли.
А) Какую максимальную процентную ставку предлагал "Плюсбанк" в 2010 году? **(8 баллов)**
Б) В 2015 году олигарх Игнатьев предложил продать ему весь участок за 750 тысяч рублей (Рз). Лиза вновь рассмотрела предложение "Плюсбанка", оказалось, что банк повысил ставку по вкладам на 5 процентных пунктов.
Поразмышляв над предложением олигарха Игнатьева, она отказалась продать землю, но изменила арендную плату фермерам.
Какая минимальная плата с одного фермерского хозяйства делает выгодным для Лизы владение землей в 2015 году?
На сколько процентов изменится ее доход от сдачи в аренду всего участка в 2015 году? **(12 баллов)**

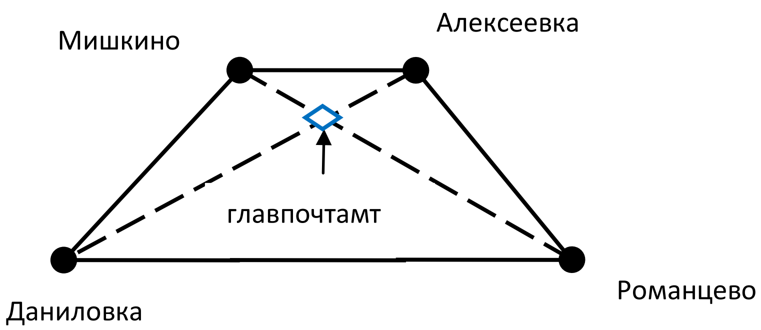
Решение:
А) Найдем, какой могла быть максимальная процентная ставка по депозитам в "Плюсбанке" в 2010 году:
1) Рента с 5 фермерских хозяйств составила R = r*N = 15*5 = 75 тыс. руб в год (где r - рента с одного фермерского хозяйства, R - рента со всех хозяйств, N - количество арендаторов земли) **(2 балла).**
2) Положив деньги в банк, Лиза могла получить 500*i/100, (где i - процентная ставка по вкладам в "Плюсбанке") **(1 балл).**
3) Лиза из двух альтернативных вариантов получения дохода выбрала покупку земли, т.е. сумма ренты оказалась на тот момент больше, чем самый высокий процент по вкладам: 75 > 500*i/100, отсюда i/100% < 75/500 = 0,15 (т.е. i <15%) **(5 баллов).**
Таким образом, ставка по вкладам в "Плюсбанке" не превышала 15%.

Б) Найдем величину ренты, которую установила Лиза арендаторам земли в 2015 году:
1) в 2015 голу ставка процента по вкладам в "Плюсбанке равна i = 15% +5% = 20% **(1 балл);**
2) в 2015 году Лиза могла бы продать участок за 750 тыс. рублей и отнести деньги в банк и получить через год доход I = 750*0,2 = 150 тыс. рублей (где I - доход по вкладу в банке) **(4 балла);**

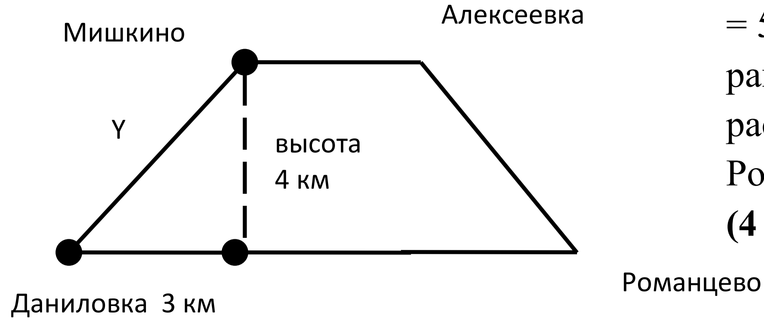
3) но, по-прежнему Лиза предпочитает получать доход от участка земли, т.е. рента с 5 фермерских хозяйств в год больше, чем проценты по депозиту:$I \le r*N$, $150 \le r*5$, отсюда $r \ge 30$ тыс. рублей **(5 баллов);**
4) в 2015 году $R \ge 30*5 = 150$ тыс. рублей, т.е. рост суммарной ренты составляет не менее $(150 - 75) = 75$ тыс. рублей (не менее 100%) **(2 балла).**

Ответ: А) в 2010 году i = 15%; Б) минимальная рента с одного хозяйства 30 тыс. рублей, рост ренты составит не менее 100%.
(***другой вариант решения может быть предложен теми участниками олимпиады, которые знают формулу цены земли: Рземли = R/i
А) $i/100 = 5*15/500 = 0,15$ (15%)
Б) $R = 750*(0,15 + 0,05) = 150$ тыс. рублей, т.е. рост ренты, составляет 100%, $r = 150/5 = 30$ тыс. рублей.

Задача 5 (20 баллов) "Маршрут для Маши"
Почтальон Маша К. живет в районном центре рядом с Главпочтамтом. Она развозит на велосипеде газеты, журналы и письма до почтовых отделений 4 деревень: Мишкино, Алексеевка, Романцево и Даниловка. Все деревни соединяются между собой хорошими дорогами, которые образуют равнобедренную трапецию с высотой 4 км и площадью 24 кв. км (см. рисунок: Главпочтамт находится на пересечении диагоналей трапеции). Расстояние от Мишкино до Алексеевки в 3 раза меньше, чем расстояние от Даниловки до Романцево. Расстояние от Главпочтамта до Даниловки равно 5,4 км (см. рисунок).
А) Маша выбрала следующий маршрут: Главпочтамт - Мишкино - Даниловка - Алексеевка - Романцево - Главпочтамт. Сколько километров на велосипеде проезжает Маша, если она каждое утро забирает почту на Главпочтамте, развозит по деревням и возвращается домой? **(14 баллов)**
Б) Попытайтесь найти самый короткий маршрут для Маши **(6 баллов)**



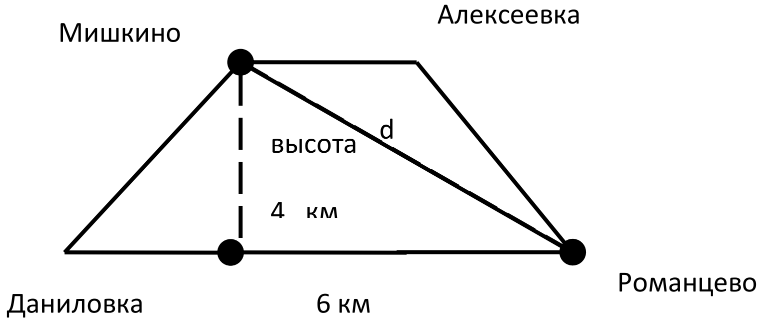
Решение: А) 1) Найдем расстояние от Мишкино до Алексеевки (X) и расстояние от Даниловки до Романцево. По условию, расстояние от Даниловки до Романцево равно 3X.
Площадь трапеции равна $24 = (X + 3X)*4/2$, отсюда $X = 3$ км, т.е. от Мишкино до Алексеевки 3км, от Даниловки до Романцево $3*3 = 9$ км. **(2+1 = 3 балла).**
2) Найдем расстояние от Мишкино до Даниловки (Y): для это воспользуемся теоремой Пифагора.



Y гипотенуза треугольника.

$Y^2 = 3^2 + 4^2 = 25$, т.о. $Y = \sqrt{25} = 5$ км. Поскольку трапеция равнобедренная, то расстояние от Алексеевки до Романцево тоже будет 5 км. **(4 балла)**

3) Найдем расстояние от Главпочтамта до Романцева (или Даниловки):



а) d - диагональ трапеции

Мишкино- Романцево - это

гипотенуза треугольника

$d^2 = 6^2 + 4^2 = 52$, т.е. $d = \sqrt{52}$, $d \approx 7{,}2$ км. **(4 балла)**

4) Найдем расстояние, которое преодолевает Маша один раз: Главпочтамт - Мишкино (1,8) - Даниловка (5,0) - Алексеевка (7,2) - Романцево (5,0) - Главпочтамт (5,4) = **24,4 км (2 балла).**

Б) 5) Найдем **самый короткий** маршрут: 1) Главпочтамт - Алексеевка **(1,8)** 2) Алексеевка - Романцево **(5)** 3) Романцево - Даниловка **(9)** 4) Даниловка - Мишкино **(5)** 5) Мишкино - Главпочтамт **(1,8)** (направление может быть противоположным Главпочтамт - Мишкино - Даниловка - Романцево - Алексеевка - Главпочтамт) **(5 баллов).** Общее расстояние = 1,8 +5 +9 + 5 +1,8 = **22,6 км (1 балл)**

(*** участники олимпиады могут найти маршрут короче, чем у Марии, но не самый короткий из возможных. Например, 1) Главпочтамт - Даниловка **(5,4)**, 2) Даниловка - Мишкино **(5,0)**, 3) Мишкино - Алексеевка **(3,0)**, 4) Алексеевка - Романцево **(5,0)**, 5) Романцево - Главпочтамт **(5,4) (3 балла).**

Общее расстояние = 5,4 + 5 + 3 + 5 + 5,4 = **23,8 км (1 балл).**

Ответ: А) Машин маршрут равен 24,4 км; Б) самый короткий маршрут Главпочтамт - Алексеевка - Романцево - Даниловка - Мишкино - Главпочтамт. Общее расстояние 22,6 км