

**XXIII Межрегиональный экономический фестиваль школьников
«Сибиряда. Шаг в мечту».
Олимпиада по экономике для учащихся 11-х классов 17.01.2016.
ОТБОРОЧНЫЙ ТУР. ЗАДАЧИ.**

Всего за задачи 100 баллов

Время выполнения 180 минут

КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

Решение каждой задачи должно быть выполнено максимально подробно, поскольку итоговая оценка учитывает то, какой процент приведенного решения является верным. Верным должно признаваться любое корректное решение приведенной задачи, независимо от того, насколько оно совпадает с авторским. Более подробные и полные решения оцениваются большим количеством баллов. Если жюри приходит к выводу, что задача скорее решена, чем не решена, то оценка должна быть больше половины от максимально возможной, в противном случае — меньше. Рекомендуются присваивать баллы за каждый шаг в решении задачи.

Арифметические ошибки не должны приводить к существенному сокращению баллов, поскольку на олимпиаде, в первую очередь, проверяется не умение хорошо считать, а умение нестандартно мыслить. При наличии ошибки нужно найти ее и снизить балл исходя из степени ее существенности.

По мотивам "Сказки о царе Салтане" А.С. Пушкина

Ветер на море гуляет

И кораблик подгоняет;

Он бежит себе в волнах

На раздутых парусах.

Корабельщики дивятся,

На кораблике толпятся,

На знакомом острове

Чудо видят наяву:

Город новый златоглавый,

Пристань с крепкою заставой -

Пушки с пристани палят,

Кораблю пристать велят.

Пристают к заставе гости

Князь Гвидон зовет их в гости...

Задача 1 (20 баллов) "Во саду ли, в огороде..."

Князь Гвидон с гордостью демонстрирует заморским гостям чудо- чудное: белка песенки поет и грызет золотые орешки с изумрудными ядрышками.

Гости могут сами угостить белку орешками. Орешки продаются тут же в сувенирных лавках. Спрос заморских гостей на орешки имеет вид $Q_d = 90 - 10P$, а предложение местных продавцов $Q_s = 5P - 15$ (где P - цена изумрудного орешка, у.е., Q - количество орешков, шт.).

Советник по экономическим вопросам посоветовал князю установить цену, ниже которой, никто из продавцов продавать орешки не должен. Советник считает, что тогда изменится выручка продавцов и можно будет, наконец-то, ввести налог на доходы от продажи орешков.

Князь Гвидон прислушался к совету, и установил минимальную цену, которая превышает равновесную. Известно, что в результате такой показатель как, выигрыш (излишек) продавцов не изменился (PS - обозначение выигрыша продавцов), а выручка действительно изменилась.

А) Найдите уровень, на котором был установлен предел цены (**13 баллов**)

Б) Оцените, как и на какую величину изменилась выручка (**2 балла**)

В) Постройте графическую модель рынка орешков, выделите площадь фигуры, соответствующей выигрышу продавца (PS) после установления предела цены. (**5 баллов**) *Выигрыш продавца (producer surplus) - это разница между рыночной ценой и ценой, по которой производители готовы продать свои товары.*

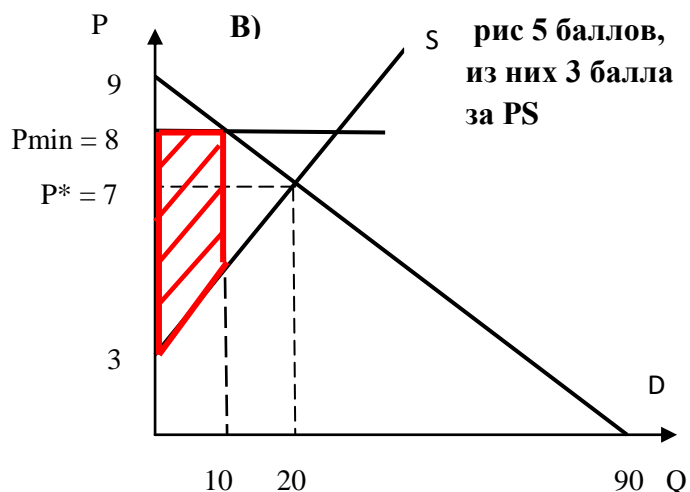


рис 5 баллов,
из них 3 балла
за PS

Решение: А) 1) Найдем равновесные параметры на рынке орешков, для этого приравняем функции спроса и предложения: $Q_d = Q_s$
 $90 - 10P = 5P - 15$, отсюда $P^* = 7$ у.е.,
 $Q^* = 20$ шт. (**2 балла**)
2) Найдем выигрыш (излишек) продавца PS1 до установления предела цены: $PS1 = (7 - 3) * 20 / 2 = 40$ у.е. (**2 балла**).

3) Выигрыш продавца PS после установления нижнего предела цены имеет вид трапеции, выделенной на рисунке. Чтобы рассчитать площадь трапеции нам понадобятся функции спроса и предложения в обратном виде: $P_d = 9 - 0,1Q$ и $P_s = 3 + 0,2Q$;

3.1) большое основание трапеции можно представить как $(P_d - 3) = 9 - 0,1Q - 3 = 6 - 0,1Q$, маленькое основание трапеции равно $(P_d - P_s) = (9 - 0,1Q) - (3 + 0,2Q) = 6 - 0,3Q$
Найдем площадь трапеции, которая является выигрышем продавца $PS2 = ((6 - 0,1Q) + (6 - 0,3Q)) * Q / 2 = (12Q - 0,4Q^2) / 2$;

3.2) Поскольку выигрыш продавца не изменился, т.е. $PS1 = PS2$, решим уравнение:
 $12Q - 0,4Q^2 - 80 = 0$, отсюда $Q_2 = 10$ ($Q = 20$ не подходит, т.к. после установления нижнего предела цены объем продаж стал меньше равновесного) (**7 баллов**).

3.3) Найдем цену, которую установил князь Гвидон: $P_{min} = (9 - 0,1 * Q) = (9 - 0,1 * 10) = 8$ у.е. ($P_{min} = 8$ у.е.) (**2 балла**).

(***возможен другой вариант решения, когда сразу будет найдена $P_{min} = 8$ у.е., без расчета $Q_2 = 10$, в этом случае ставится полный балл за пункт А), т.е. **13 баллов**).

Б) Найдем, как изменилась выручка продавцов от продажи орешков:

$$TR1 = P^*Q = 7 * 20 = 140 \text{ у.е. (0,5 балла)}$$

$$TR2 = P_2 * Q_2 = 8 * 10 = 80 \text{ у.е. (0,5 балла)}$$

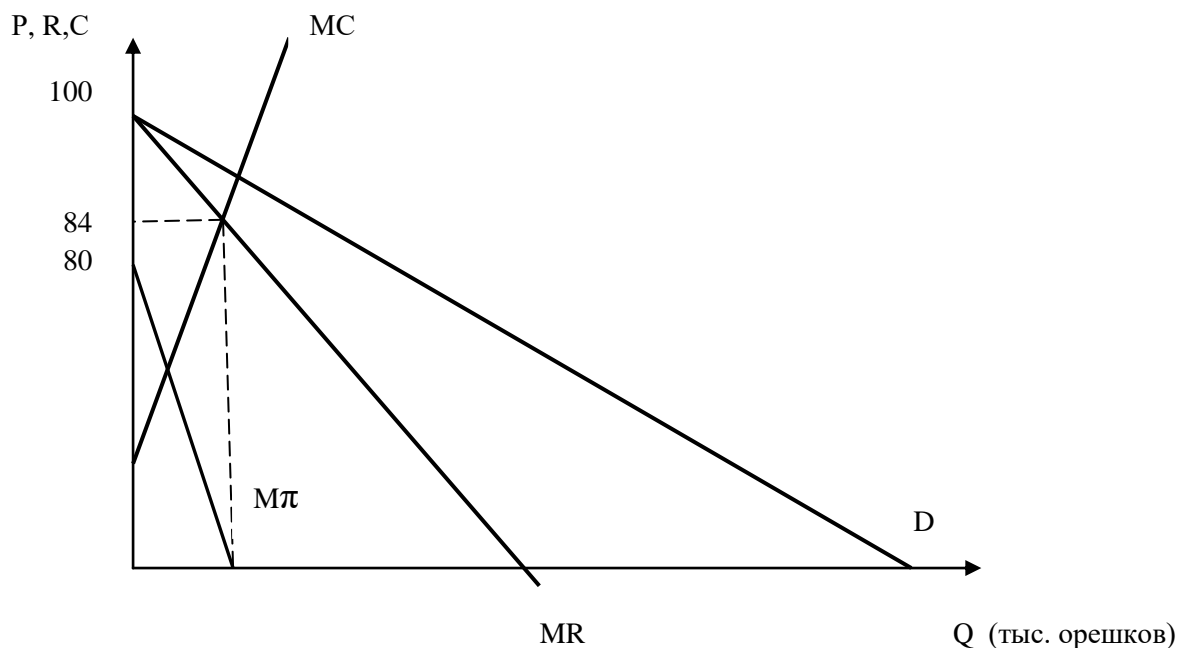
$$\Delta TR = 80 - 140 = -60 \text{ у.е. (1 балл)}$$

Ответ: а) минимальный предел цены $P_{min} = 8$ у.е., б) выручка продавца сократилась на 60 у.е.

Задача 2 (20 баллов) "Крепкий орешек - 11"

Орешки для белочки производит фирма "Крепкий орешек", которая является монополистом. Модель фирмы представлена на рисунке (P - цена, рублей, Q- выпуск орешков, тыс. шт., Мл - маржинальная прибыль). Известно, что фирма максимизирует прибыль, получая годовую выручку 7360 тыс. рублей. Постоянные издержки составляют 15 тыс. рублей.

А) Найдите оптимальный объем производства орешков, цену и прибыль фирмы "Крепкий орешек" (14 баллов)



Б) Министерство экологии считает, что производство орешков наносит ущерб окружающей среде острова и требует установить очистные сооружения на предприятии. Фирма "Крепкий орешек", чтобы избежать закрытия, вынуждена была установить гидротехнические очистные сооружения. При этом технология производства орешков не изменилась, но эластичность общих затрат по объему выпуска стала равна 1.

Найдите ежегодные расходы связанные с обслуживанием очистных сооружений, если известно, что эти расходы не зависят от объема выпуска продукта. (6 баллов).

Решение:

А) Найдём оптимальный объем производства фирмы (Q^*) и цену (P^*)

1 способ (алгебраический):

1) Запишем обратную функцию спроса, которая имеет вид $P_d = -aQ + b$, где $b = 100$, следовательно $P_d = -aQ + 100$;

2) Запишем функцию выручки $TR = P^*Q = (-aQ + 100) \cdot Q = -aQ^2 + 100Q$;

3) Запишем функцию $MR = (TR)' = (-aQ^2 + 100Q)' = -2aQ + 100$. Т.к. при производстве оптимального объема $MR = 84$ (см. график), т.е. $-2aQ^* + 100 = 84$, отсюда $aQ^* = -8$;

4) По условию $TR(Q^*) = 7360$ тыс. рублей, таким образом, $(-aQ^2 + 100Q) = (-8Q^* + 100Q^*) = 7360$, отсюда $Q^* = 80$ тысяч штук (5 баллов), $P^* = TR / Q^* = 7360 / 80 = 92$ рубля (1 балл).

5) Запишем функцию $M\pi$, это линейная функция $M\pi = 80 - bQ$, если фирма производит Q^* (оптимальный объем), то $M\pi = 0$, следовательно, $M\pi = 80 - bQ = 0$, $80 = bQ^*$, найдем $b = 80 / 80 = 1$; функция предельной прибыли имеет вид $M\pi = 80 - Q$ (1 балл).

6) Вернемся к функции MR : $aQ^* = -8$, отсюда $a = -8 / 80 = -0,1$, следовательно, $MR = -2 * 0,1Q + 100 = -0,2Q + 100$ (2 балла).

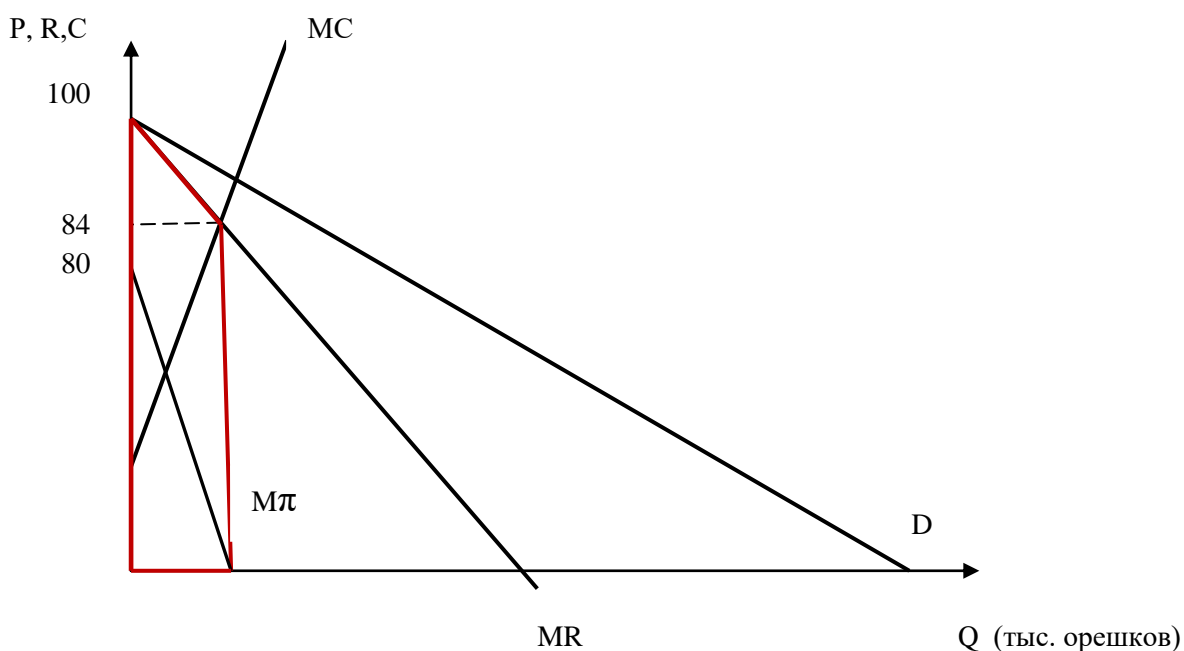
7) $MC = MR - M\pi = (-0,2Q + 100) - (80 - Q) = 20 + 0,8Q$ (2 балла)

8) Запишем функцию $TC = TVC + TFC = \int MC + TFC = \int (20 + 0,8Q) + 15 = 20Q + 0,4Q^2 + 15$. Найдем величину общих издержек: $TC = 20 * 80 + 0,4 * 80^2 + 15 = 4175$ тыс. рублей (2 балла).

9) Определим прибыль фирмы "Крепкий орешек": $\pi = TR - TC = 7360 - 4175 = 3185$ ($\pi = 3185$ тыс. рублей) (1 балл).

2 способ (геометрический):

1) Выручка фирмы "Крепкий орешек" может быть рассчитана, как площадь фигуры под графиком MR , т.е. трапеции, выделенной на рисунке: $TR = (100 + 84)Q^* / 2 = 7360$, отсюда $Q^* = 80$ тысяч штук (5 баллов)



2) $P^* = 7360 / 80 = 92$ рубля (1 балл).

3) Запишем функцию линейную спроса $Q_d = -aP + b$, для этого решим систему уравнений:

(1) $80 = a92 + b$, (2) $0 = a100 + b$, отсюда $a = -10$, $b = 1000$, $Q_d = 1000 - 10P$

4) запишем функцию MR : перейдем к обратной функции спроса $P_d = 100 - 0,1Q$

$TR = P^*Q = (100 - 0,1Q) * Q = 100Q - 0,1Q^2$, $MR = (TR)' = (100Q - 0,1Q^2)' = 100 - 0,2Q$ (2 балла).

5) запишем функцию $M\pi$, это линейная функция $M\pi = 80 - bQ$, если фирма производит Q^* , т.е. оптимальный объем, то $M\pi = 0$, следовательно, $M\pi = 80 - bQ = 0$, $80 = bQ^*$, найдем $b = 80/80 = 1$. Таким образом, функция $M\pi = 80 - Q$ (1 балл);

6) $MC = MR - M\pi = (-0,2Q + 100) - (80 - Q) = 20 + 0,8Q$ (2 балла).

7) Запишем функцию $TC = TVC + TFC = \int MC + TFC = \int (20 + 0,8Q) + 15 = 20Q + 0,4Q^2 + 15$. Найдем величину общих издержек $TC = 20 \cdot 80 + 0,4 \cdot 80^2 + 15 = 4175$ тыс. рублей (2 балла).

8) Определим прибыль фирмы "Крепкий орешек": $\pi = TR - TC = 7360 - 4175 = 3185$ тыс. рублей (1 балл).

Б) Найдем ежегодные расходы на обслуживанием очистных сооружений.

1 способ:

По условию задачи эластичность общих затрат по объему производства равна 1,

$E^{TC/Q} = (TC)' \cdot Q/TC = MC \cdot Q/TC = 1$ (2 балла);

$E^{TC/Q} = (20 + 0,8Q) \cdot Q / (20Q + 0,4Q^2 + 15 + C) = 1$ (где C - стоимость очистных сооружений), решив это уравнение получим $C = 2545$ тыс. рублей (4 балла).

2 способ:

1) $E^{TC/Q} = (TC)' \cdot Q/TC = MC \cdot Q/TC = MC/ATC = 1$ (2 балла)

2) технология производства орешков осталась прежней, т.е. $MC = 84$, $84/ATC = 1$, значит $ATC = 84$, $TC = ATC \cdot Q^* = 84 \cdot 80 = 6720$ (3 балла).

3) стоимость обслуживания очистных сооружений $C = TC_2 - TC_1 = 6720 - 4175 = 2545$ тыс рублей (1 балл).

Ответ: А) $Q^* = 80$ тыс. шт., $P^* = 92$ рубля, $\pi = 3185$ тысяч рублей, б) $C = 2545$ тысяч рублей.

Задача 3 (20 баллов) " Souvenir"

Золотые скорлупки от орешков и изумрудные ядрышки отправляют в сувенирную мастерскую "ОчУмелые ручки". Ежегодно мастерская получает 3000 изумрудов и 6000 грамм золота.

Мастера изготавливают два вида сувениров: белочек и елочки. Для производства одного сувенира "белочка" необходимо 5 изумрудов и 5 грамм золота. Для производства одной елочки требуется 2 изумруда и 10 грамм золота.

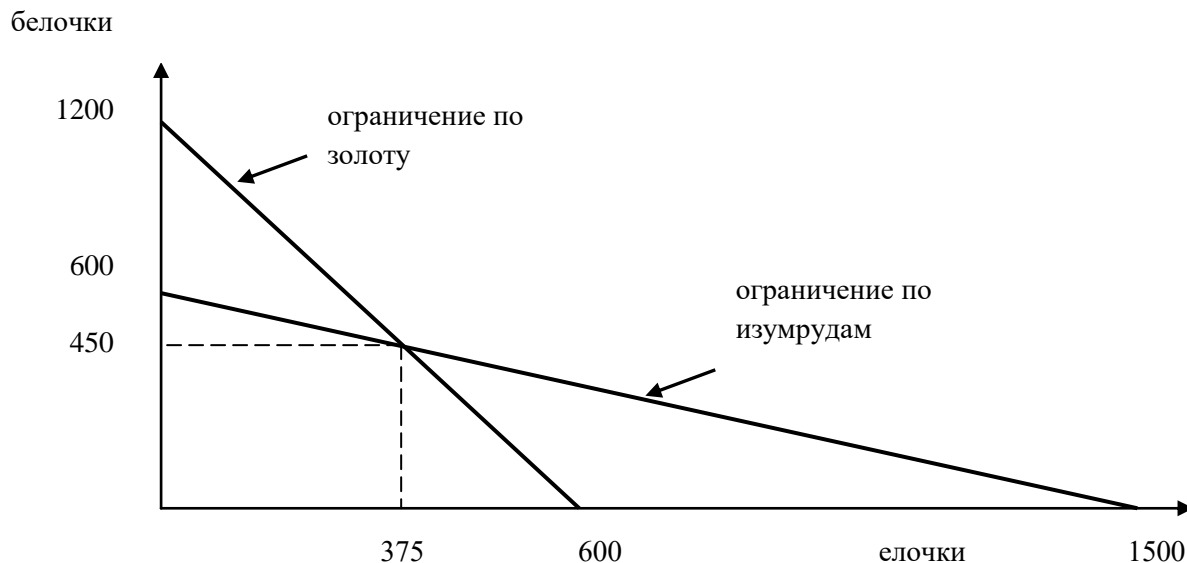
А) Постройте границу производственных возможностей (КПВ) мастерской "ОчУмелые ручки" (10 баллов).

Б) В новом году мастерская планирует начать выпуск браслетов из изумрудов. Дизайнеры изготовили образец такого браслета, на его изготовление потребовалось 20 изумрудов. Постройте новую границу производственных возможностей (трехмерную) мастерской " ОчУмелые ручки" (пожалуйста, сделайте это на отдельном рисунке) (10 баллов).

Решение:

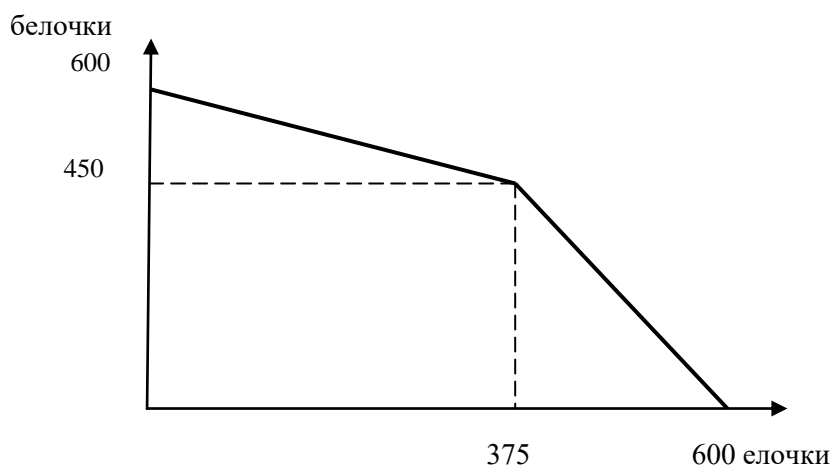
А) 1) Запишем производственное ограничение для изумрудов: $3000 = 5B + 2E$ (1);

2) Запишем производственное ограничение для золота: $6000 = 5Б + 10Е$ (2);



3) Найдем значения в точке пересечения графиков, для это решим систему уравнений (1) и (2), получим $Б = 450$, $Е = 375$

4) Теперь построим КПВ (просто уберем лишние участки на выше построенном рисунке)



Возможны другие способы построения КПВ.

Правильно построенная КПВ оценивается в **10 баллов**, в т.ч. координаты точки излома **5 баллов**, крайние точки **4 балла (2+2)**, общий вид КПВ **1 балл**.

Б) 1) Построим ограничение по изумрудам для трех товаров:

Все точки, в которых возможно производство лежат внутри и на границах пирамиды, ограниченной уравнением плоскости $3000 = 5Б + 2Е + 20Бр$ и уравнениями: $Б=0$, $Е=0$, $Бр=0$, т.к. возможен только неотрицательный выпуск.

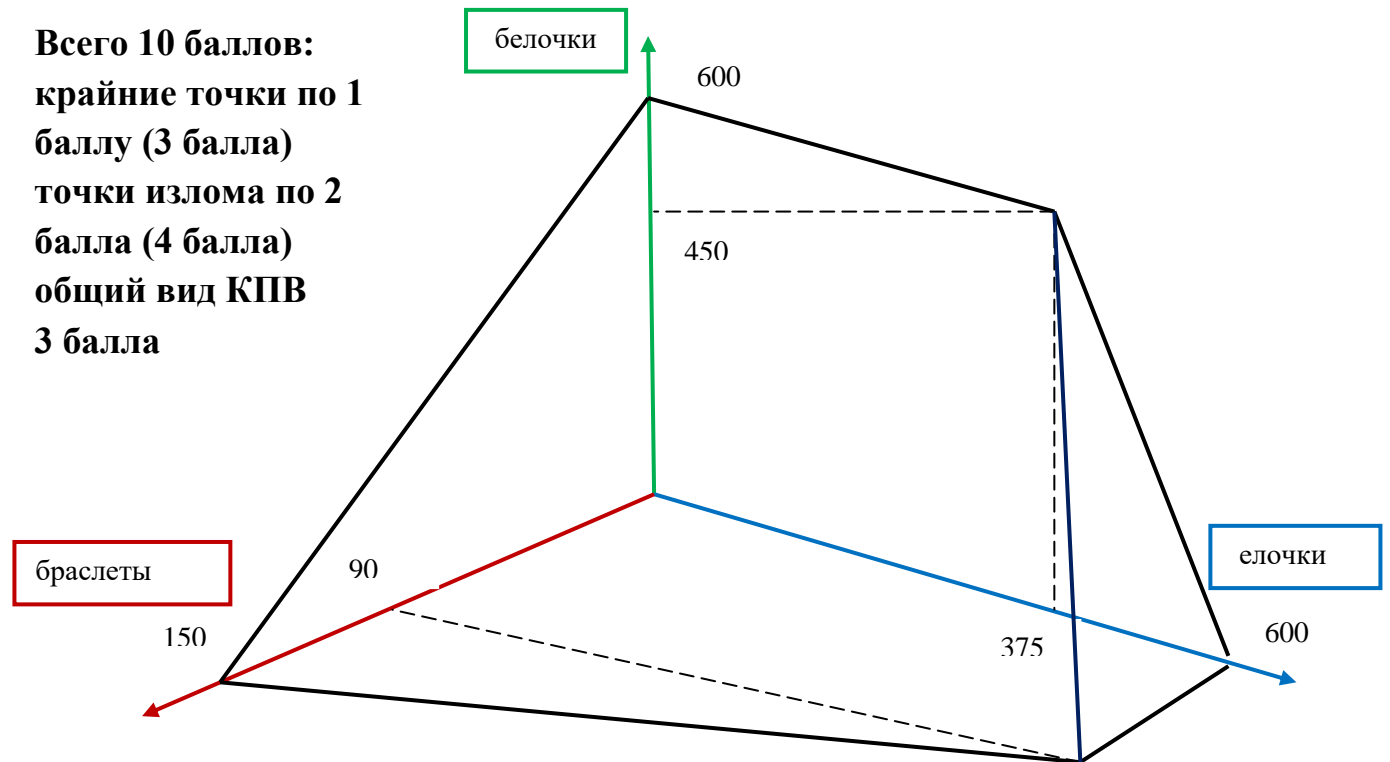
2) Кроме того, существует ограничение по золоту. Плоскость описывается уравнением: $6000 = 5Б + 10Е$ и параллельна оси 0-браслеты. При сечении плоскостью пирамиды образуется объемная фигура – усеченная пирамида.

3) Найдем координаты двух вершин:

а) первая координата находится в плоскости $Бр = 0$, остальные координаты находятся из пересечения прямых $6000 = 5Б + 10Е$ и $3000 = 5Б + 2Е$. Получаем точку с координатами $Б = 450$, $Е = 375$, $Бр = 0$;

б) вторая координата находится в плоскости $B = 0$, остальные координаты находятся из пересечения прямых $E = 600$ и $3000 = 20B + 2E$. Получаем точку с координатами $B = 0, E = 600, B_p = 90$

4) Граница производственных возможностей для трех товаров будет иметь вид:



Задача 4 (20 баллов) "В гостях у сказки"

Между царством славного Салтана и княжеством Гвидона существуют взаимовыгодные торговые отношения. В частности известно, что, царство Салтана экспортирует льняное полотно в княжество Гвидона. При этом функция экспорта полотна имеет вид $Q_{\text{э}} = 15P - 60$, а функция его импорта $Q_{\text{и}} = 100 - 10P$ (где P - цена, руб за 1 метр, Q - количество, тыс. метров).

А) Определите цену, которая сложилась на межгосударственном рынке льняного полотна и объем экспорта/импорта (2 балла).

Б) Как изменилось потребление полотна в этих государствах, если известно, что:

- 1) спрос и предложение стран имеют линейный вид;
- 2) в царстве Салтана до развития торговых отношений производство полотна составляло 70 тыс. м и эластичность предложения в равновесии составляла $E_s = 4/7$ (8 баллов).
- 3) В княжестве Гвидона дешевле 6 рублей полотно никто из отечественных производителей не предлагал, а в результате импорта полотна собственное производство снизилось до 2,4 тыс. м (6 баллов).

В) При помощи графических моделей покажите ситуацию до и после начала торговли в каждом из государств (2+2=4 баллов).

Решение:

А) 1) Найдем цену льняного полотна, которая сложилась в процессе торговли двух государств, для этого приравняем функции экспорта и импорта: $Q_{\text{э}} = Q_{\text{и}}$ $15P - 60 = 100 - 10P$, отсюда $P_{\text{м}} = 6,4$ рублей (1 балл).

2) Найдем объем экспорта/импорта: $Q_{\text{э/и}} = 36$ тыс метров (1 балл).

Б) Царство Салтана:

1) Царство Салтана является экспортером полотна, $Q_{\text{э}} = Q_{\text{s}} - Q_{\text{d}}$ (т.е. это функция излишков этого государства), поэтому, чтобы найти равновесную цену полотна до начала торговых отношений надо приравнять функцию экспорта к 0, т.е. $Q_{\text{э}} = 15P - 60 = 0$, $P^* = 4$ руб.

2) Запишем функцию предложения, для этого решим систему уравнений: $70 = a \cdot 4 + b$, $4/7 = a \cdot 4/70$, отсюда $a = 10$, $b = 30$, $Q_{\text{s}} = 10P + 30$ (5 баллов).

3) Найдем производство полотна с учетом мировой торговли: $Q_{\text{s}} = 10P + 30 = 10 \cdot 6,4 + 30 = 94$ тыс. м.

4) Найдем потребление полотна в новых условиях: $Q_{\text{d}} = Q_{\text{s}} - Q_{\text{э}} = 94 - 36 = 58$ тыс. м.

5) Таким образом, потребление полотна в царстве Салтана $(58 - 70) = -12$ тыс. м., т.е. упало на 12 тыс. м (3 балла).

Княжество Гвидона:

б) Запишем функции спроса и предложения:

Чтобы записать функцию предложения решим систему уравнений: $2,4 = a \cdot 6,4 + b$, $0 = a \cdot 6 + b$, отсюда $a = 6$, $b = -36$, $Q_{\text{s}} = 6P - 36$ (2 балла).

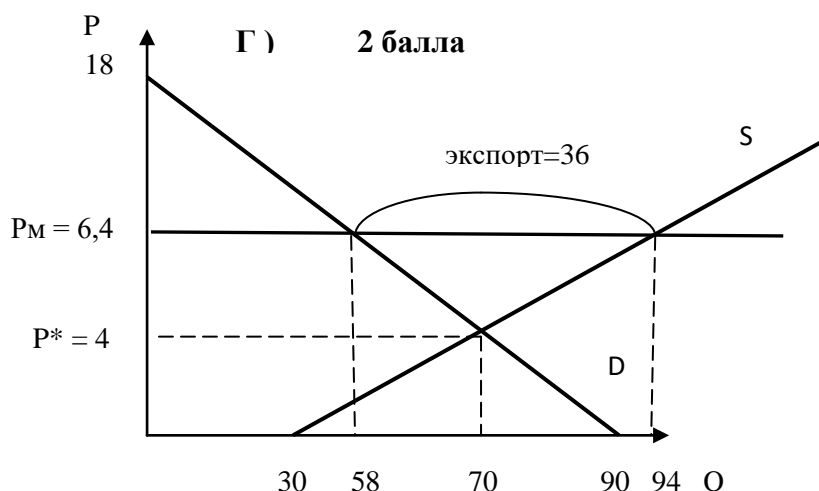
Функция спроса на полотно: $Q_{\text{d}} = Q_{\text{и}} + Q_{\text{s}} = (100 - 10P) + (6P - 36) = 64 - 4P$ ($Q_{\text{d}} = 64 - 4P$) (2 балла).

Найдем исходное равновесие: $Q_{\text{d}} = Q_{\text{s}}$, $64 - 4P = 6P - 36$, $P^* = 10$, $Q^* = 24$ (1 балл).

Найдем потребление полотна с учетом импорта, для этого подставим $P_{\text{м}} = 6,4$ в функцию спроса: $Q_{\text{d}} = 64 - 4P = 64 - 4 \cdot 6,4 = 38,4$ тыс. м., в княжестве потребление увеличилось на $(38,4 - 24) = +14,4$ тыс. м. (1 балл).

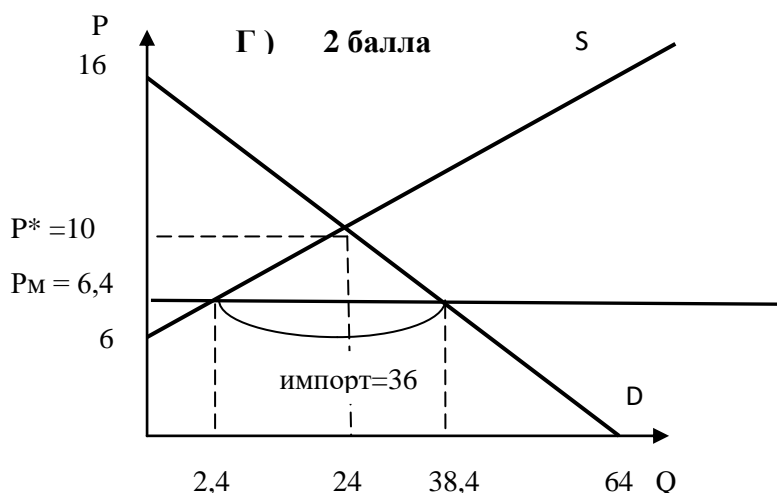
В) Царство Салтана:

Покажем данную ситуацию при помощи графической модели, для этого запишем функцию спроса на полотно: $Q_{\text{д}} = Q_{\text{s}} - Q_{\text{э}} = (10P + 30) - (15P - 60) = 90 - 5P$ ($Q_{\text{д}} = 90 - 5P$)



Княжество Гвидона:

Покажем данную ситуацию при помощи графической модели:



Ответ: А) $P_m = 6,4$ рубля, $Q_{э/и} = 36$ тыс метров. Б) В царстве Салтана потребление полотна упало на 12 тыс. м., в княжестве Гвидона потребление увеличилось на 14,4 тыс. м.

Задача 5 (20 баллов) "Рынок бумаги - 11"

Канцелярии княжества требуется большое количество бумаги для ведения государственного делопроизводства. Бумагу для нужд двора поставляет проверенный иностранный поставщик. Расходы казны на бумагу составляют $G_1 = 28800$ руб в год. Министр экономики считает, это непоправимым расточительством и предлагает импортозамещение, т.е. покупать бумагу на свободном рынке внутри страны. Экономические советники провели исследование столичного рынка бумаги и выяснили:

- 1) спрос и предложение имеют линейный вид;
- 2) никто из продавцов не готов предлагать бумагу дешевле 150 рублей за рулон;
- 3) эластичность предложения в равновесии равна 3, а выручка всех продавцов составляет 33750 рублей;
- 4) эластичность спроса равна эластичности предложения (по модулю) в равновесии;
- 5) объем продаж вырастет на 40%, если государство будет покупать прежнее количество бумаги на свободном рынке.

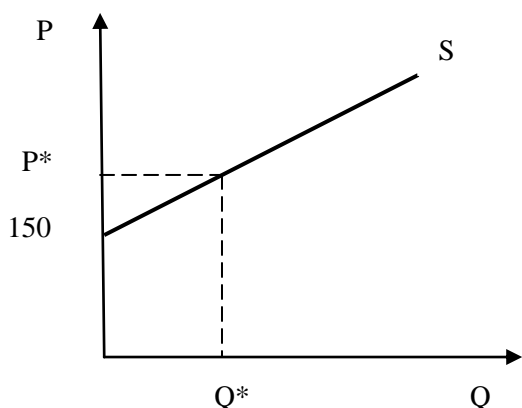
Найдите: А) параметры рыночного равновесия свободного рынка до выхода на него государства (**6 баллов**).

Б) Стоит ли государству отказаться от услуг проверенного поставщика? (**9 баллов**)

В) Постройте графическую модель рынка бумаги. Покажите площадь возможных расходов государства на бумагу. (**5 баллов**)

Решение:

А) Чтобы найти исходное равновесие достаточно информации об эластичности предложения:



- 1) Используя условия задачи, представим график предложения ($P_{\min} = 150, E_s > 1$)
- 2) Чтобы найти равновесную цену (P^*) воспользуемся методом отрезков: $E_s = P^*/(P^* - P_{\min})$
 $3 = P^*/(P^* - 150)$, отсюда $P^* = 225$ рублей (**4 балла**);
- 3) Найдем $Q^* = TR/P^* = 33750/225 = 150$ рулонов (**2 балла**)

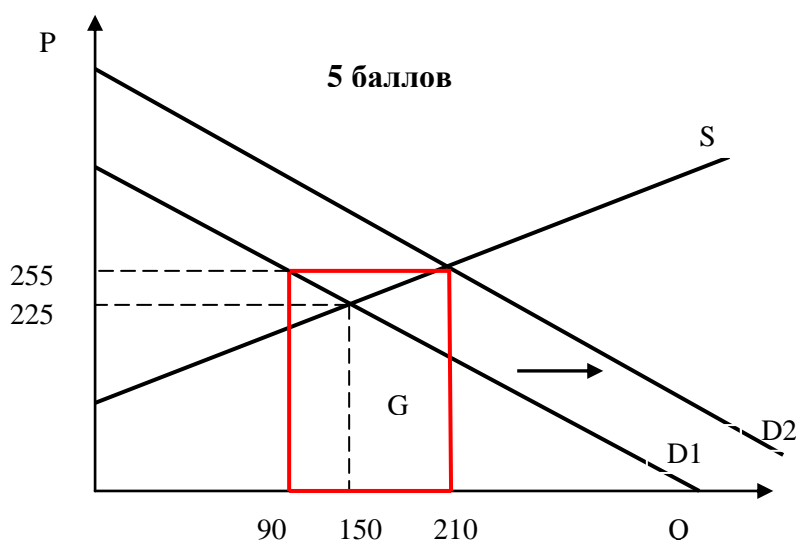
Б) Для дальнейшего решения задачи необходимо записать функции спроса и предложения:

1) Функция предложения линейна, т.е. имеет вид: $Q_s = aP + b$, подставим полученные данные в уравнение предложения: $150 = a \cdot 225 + b$ (1). Запишем уравнение эластичности ($E_s = a \cdot P/Q$): $3 = a \cdot 225/150$ (2). Решим эту систему уравнений, получим: $a = 2, b = -300, Q_s = 2P - 300$ (**2 балла**).

2) Спрос задан линейной функцией, т.е. можно записать его аналогично предложению: $150 = a \cdot 225 + b$ (1), $-3 = a \cdot 225/150$ (2) (эластичность спроса отрицательная величина), решим эти уравнения $a = -2, b = 600, Q_d = 600 - 2P$ (**2 балла**)

3) Объем продаж увеличился на 40%, $Q^*_2 = 150 \cdot 1,4 = 210$ рулонов бумаги (**1 балл**).

4) Представим графическую модель рынка бумаги: государство - покупатель бумаги, поэтому спрос вырос.



5) Найдем новую равновесную цену P^*_2 , для этого подставим $Q^*_2 = 210$ в функцию предложения: $210 = 2P - 300$, отсюда $P^*_2 = 255$ рублей (**1 балл**).

6) Чтобы найти количество бумаги, которое закупает государство, надо знать, сколько бумаги покупают остальные жители страны. По закону спроса они стали меньше

покупать бумаги, т.к. выросла цена. Подставив новую цену в функцию спроса жителей княжества $Q_{\text{жителей}} = 600 - 2 \cdot 255 = 90$ рулонов.

Все остальное покупает государство, т.е. $Q_{\text{госуд}} = Q^* - Q_{\text{жителей}} = 210 - 90 = 120$ рулонов (2 балла).

7) Найдем новые расходы на бумагу, которые могут быть у государства $G_2 = 120 \cdot 255 = 30600$ рублей (0,5 балла) (на графической модели выделены красным цветом).

$G_1 (28800) < G_2 (30600)$, таким образом, государству НЕ стоит менять проверенного поставщика (0,5 балла).

Ответ: А) $P^*_1 = 225$ рублей, $Q^*_1 = 150$ рулонов бумаги. Б) Государству НЕ стоит отказываться от услуг проверенного поставщика.

*****возможно, участники олимпиады предложат другое решение и модель рынка в п. Б) и В):**

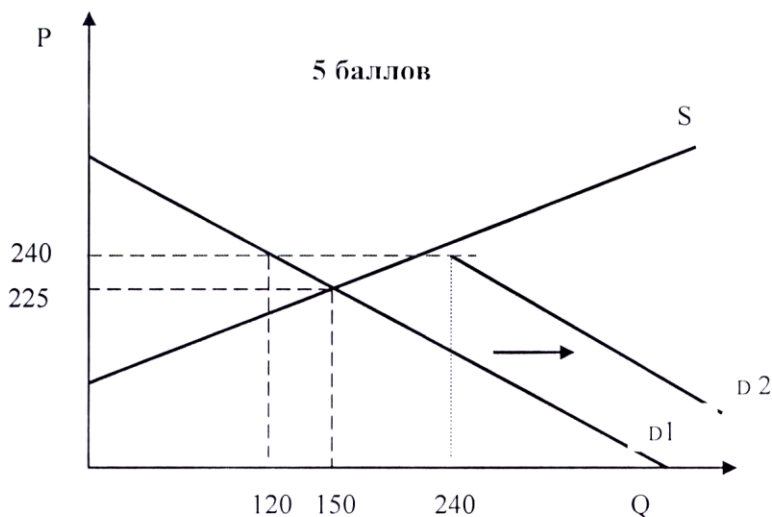
Б) 1. Заметим, что объем продаж увеличился на 40% и составил: $Q = 150 \cdot 1.4 = 210$

2. При $Q = 210$, $P_s = 255$

3. $Q_d = 600 + X - 2P$, где X - спрос государства, и $Q_d(P = 255) = 210$, тогда $X = 120$.

4. $P_{\text{гос}} = 28800 / 120 = 240$

5. При цене 255 рублей государство не будет на рынке закупать бумагу, т.к. сейчас оно закупает по 240 рублей, государству НЕ следует отказываться от услуг поставщика (9 баллов).



Председатель оргкомитета,
начальник управления



В.Н. Щукин