

разных мест:

$$MC_A = 0,5q_A, MC_S = 10, MC_B = 5q_B + 20.$$

Фейнман никогда не захочет продавать больше 10 единиц продукции: с $Q = 10$ начинается неэластичный участок функции спроса, где выручка убывает, то есть прибыль монополиста не может быть максимальной. При этом видно, что даже если произвести 10 единиц продукции на заводе А, предельные издержки производства последней единицы окажутся меньше, чем предельные издержки производства любой единицы в любом другом месте. Следовательно, всё производство будет организовано там же, где находится магазин, и общая функция издержек составит $TC = 0,25Q^2$. Функция прибыли в этом случае имеет вид

$$\pi = (20 - Q)Q - 0,25Q^2.$$

Это парабола с ветвями вниз, максимум ее достигается при $Q^* = 8$. Подставляя это значение в функцию прибыли, получаем $\pi^* = 80$.

Ситуация изображена на рис. 1.1(a) (заштрихованная площадь соответствует максимальной прибыли).

Магазин на складе.

Рассчитаем предельные издержки (с учетом доставки) продукции, привезенной из разных мест:

$$MC_A = 0,5q_A + 10, MC_S = 0, MC_B = 5q_B + 10.$$

Ясно, что в первую очередь нужно продать все 5 единиц, находящиеся на складе. При этом $MR(5) = 10$, то есть продажа любого количества продукции, превышающего 5, будет приносить меньше 10 долларов предельного дохода в расчете на дополнительную единицу. Доставка продукции с любого из заводов стоит 10 за единицу (а еще есть издержки производства), поэтому продавать произведенные на заводах единицы продукции невыгодно. Продав 5 единиц, Фейнман получит прибыль, равную $\pi^* = 5 \cdot 15 = 75$.

Ситуация изображена на рис. 1.1(b).

Магазин на заводе В

Рассчитаем предельные издержки (с учетом доставки) продукции, привезенной из разных мест:

$$MC_A = 0,5q_A + 20, MC_S = 10, MC_B = 5q_B.$$

Предельные издержки (включая доставку) даже для самых первых единиц продукции на заводе А больше 20. При этом, используя завод В и продукцию со склада, можно произвести 9 единиц продукции с предельными издержками, не превышающими 20 (5 со склада и 4 на заводе), но даже при 9 единицах продукции предельный доход уже существенно меньше предельных издержек; следовательно, в этом случае завод А использоваться не будет. Сравнивая предельные издержки на доставку со склада и производство на заводе В, можно заметить, что производство на заводе дешевле при первых 2 единицах ($10 > 5q_b \Leftrightarrow q_b < 2$), затем дешевле брать продукцию со склада, но там находится только 5 единиц, поэтому, если мы хотим производить $Q > 7$, придется вернуться на завод и производить там $(Q - 5)$ единиц продукции. Таким образом,

функция предельных издержек имеет вид:

$$MC = \begin{cases} 5Q, & \text{если } Q \leq 2; \\ 10, & \text{если } 2 \leq Q \leq 7; \\ 5(Q - 5), & \text{если } Q \geq 7. \end{cases}$$

Функция предельной выручки имеет вид $MR = 20 - 2Q$ (убывающая функция) и пересекает неубывающую функцию предельных издержек при $Q = 5$. Значит, фирма произведет на втором заводе 2 барабана, потратит на это 10 долларов, а еще 3 единицы привезет со склада, потратив на это 30 долларов. Выручка от продажи 5 единиц продукции составит 75, то есть прибыль мистера Фейнмана будет равна $\pi^* = 35$.

Ситуация изображена на рис. 1.1(с).

Сравнение вариантов

Получается, то максимальная прибыль $\pi^a = 80$ достигается при открытии магазина на заводе А и продаже на нем 8 произведенных там же барабанов.

Ответ: *следует открыть магазин на заводе А.*

Задача 2. Молодильные яблоки и натуральный налог.

В Тридевятом царстве ежегодный спрос рядовых граждан на молодильные яблоки описывается функцией $Q_d = 100 - 2P$, а ежегодное предложение яблок местными поставщиками — функцией $Q_s = 2P - 20$, где Q — количество яблок в тоннах, а P — цена тонны яблок в рублях.

До этого года молодильные яблоки для нужд царского двора на рынке не закупались, так как не было в этом потребности — у царя был свой сад с яблонями. Однако в этом году все яблони в царском саду погибли от неизвестной болезни, а новые саженцы еще не скоро начнут плодоносить. И пришлось царю решать вопрос, как обеспечить поставки молодильных яблок для царского двора. Царские советники для решения этой проблемы подготовили два указа, а вот какой из них подписать, царь никак не может решить.

По указу, подготовленному **молодым советником**, предлагается со всех покупателей молодильных яблок взимать натуральный налог. В этом указе четко прописано: «при покупке любого количества молодильных яблок покупателям следует половину купленных яблок отдать царским сборщикам».

Старый советник тоже за взимание натурального налога, но не с покупателей, а с продавцов. В его указе написано: «при продаже любого количества молодильных яблок продавец обязан ровно такое же количество яблок безвозмездно сдать царским сборщикам».

Сидит царь и думает, какой же указ ему подписать, чтобы яблок заполучить побольше. А царский шут ему и говорит: «Да не печалься ты, государь. Теоретически, как мне кажется, результат в обоих случаях будет один и тот же, что для покупателей, что для продавцов, что для тебя. А на практике...».

а) Рассчитайте, сколько царские сборщики могут собрать яблок, если будет подписан указ по рекомендациям молодого советника.

б) Рассчитайте, сколько царские сборщики могут собрать яблок, если будет

подписан указ по рекомендациям старого советника.

в) Оцените, прав ли шут в своих предположениях о том, что оба налога одинаковы с точки зрения конечного результата. Если шут не прав, приведите содержательное объяснение получившегося расхождения. А если шут прав, приведите другие экономические аргументы в пользу выбора того или другого налога, которые стоило бы принять во внимание царю.

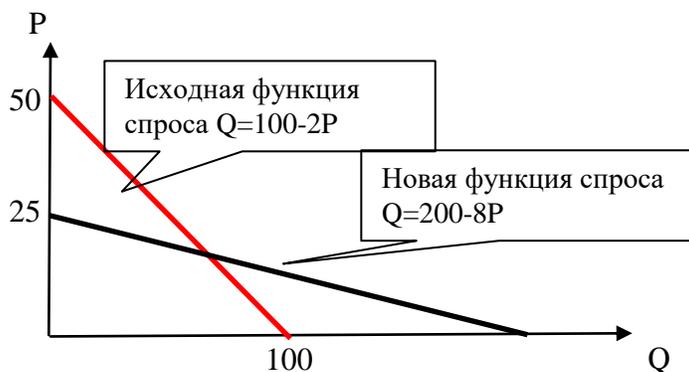
Решение

а) Рассмотрим рекомендацию молодого советника (натуральный налог на покупателей). При рассуждениях о том, как работает этот налог, правдоподобными будут выглядеть две версии:

Версия 1: спрос вырастет, потому что покупателям нужно отдавать половину купленного, так что они будут покупать больше, чтобы что-то осталось для потребления.

Версия 2: спрос упадет, потому что потребители не хотят покупать для государства — действительно, зачем покупать, если кто-то заберет купленное?

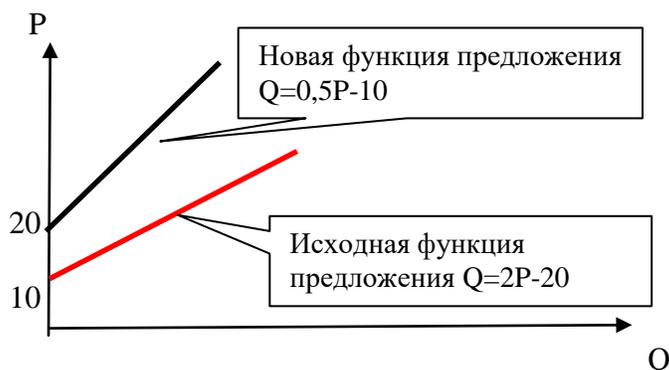
На самом деле, действуют оба эффекта, и при разных ценах доминирует или первый, или второй:



Как получается новая функция спроса? Попробуем воспроизвести рассуждения типичного покупателя.

- Чтобы **съесть** Q , нужно **купить** $2Q$ и потратить $2PQ$, то есть $2P$ на каждую **съеденную** единицу.
- Значит, фактически, если на ценнике написано P , я плачу $2P$ — именно такую цену нужно подставить в старый спрос.
- $100 - 2(2P)$ — спрос на **съеденные** единицы.
- Однако к предложению нужно приравнивать не количество **съеденных** единиц, а количество **купленных**. Их вдвое больше: $D = 200 - 8P$.
- Равновесие: $200 - 8P = 2P - 20 \Leftrightarrow P^* = 22, Q^* = 24, T = 12$.

б) Рассуждая про производителей аналогично, можем получить новую функцию предложения:



Рассуждения типичного производителя:

- Если **произведем** Q , то **продадим** $Q/2$. Выручка составит $PQ/2$, то есть $P/2$ на каждую **произведенную** единицу — именно эта цена волнует продавца, ее и надо подставлять в предложение.
- $2P - 20$ — предложение **произведенных** единиц.
- Но к спросу нужно приравнивать не то, что **производится**, а то, что **продается**: вдвое меньше: $S = P - 10$.
- Отсюда $100 - 2P = P - 10 \Leftrightarrow P^{\text{а}} = 44, Q^{\text{а}} = 12, T = 12$.

в) Получилось, что разницы между налогами с точки зрения сборов нет. Однако есть ли разница на практике? Возможен такой аргумент. Производителей, как правило, меньше, чем потребителей, а значит, совокупные транзакционные издержки, связанные с уплатой налогов, будут меньше. Производители привыкли отчитываться (с помощью кассовых аппаратов) о каждой операции, так что ввести налог на них будет меньшим бременем, чем на потребителей. Возможны и другие идеи.

Задача 3. Волшебное зелье

До кризиса в городе N проживали M волшебников, из них ровно 45 % имели высшее, 30 % — среднее, а остальные — начальное волшебное образование. Все волшебники для своих волшебных нужд предъявляли спрос на волшебное зелье. В таблице

Образование	Спрос
высшее	$Q = 10 - 2P$
среднее	$Q = 30 - 3P$
начальное	$Q = 60 - 4P$

представлены данные об индивидуальном спросе волшебника на волшебное зелье, где Q — величина спроса в литрах, а P — цена литра волшебного зелья в рубликах.

Когда начался экономический кризис, часть волшебников уехали из города N , при этом число уехавших волшебников, имевших начальное образование, составило ровно 120% от уехавших волшебников, имевших среднее образование, и 60% от числа уехавших волшебников, имевших высшее образование. Известно, что в городе осталась только четверть волшебников с начальным волшебным образованием, а из числа волшебников с высшим образованием осталось не более 40 человек. Оцените, сколько волшебников проживало в городе N до кризиса. Определите, какой была функция суммарного рыночного спроса волшебников на волшебное зелье до кризиса.

Решение

Математическая основа задачи заимствована из пособия: Белоносов В.С., Фокин М.В. Задачи вступительных экзаменов по математике: Учеб. пособие.

Новосибирск: Сиб. унив. изд-во, 2005.

Обозначим через X , Y и Z численность волшебников с высшим, средним и начальным образованием, соответственно. Пусть до кризиса в городе N проживали X_0 , Y_0 и Z_0 волшебников, уехали соответственно X_1 , Y_1 и Z_1 , а осталось X_2 , Y_2 и Z_2 волшебников.

Удобно информацию из условия записать в таблицу:

Уровень образования волшебника	Жили в городе N до кризиса	Уехали из города N	Остались в городе N
высшее волшебное образование	$X_0=0,45*M=9/20*M$	X_1	$X_2=(X_0-X_1)\leq 40$
среднее волшебное образование	$Y_0=0,3*M=3/10*M$	Y_1	$Y_2=Y_0-Y_1$
начальное волшебное образование	$Z_0=0,25*M=1/4*M$	$Z_1=1,2*Y_1=6/5*Y_1$ $Z_1=0,6*X_1=3/5*X_1$ или $Y_1=1/2*X_1$	$Z_2=1/4*Z_0=1/4*(1/4M)$

Так как число волшебников в любом случае может быть только целым числом, то M можно представить как $20*n$, или $4*5*n$, где n – это натуральное число. В этом случае X_0 , Y_0 и Z_0 будут целыми числами.

Число оставшихся в городе волшебников с начальным образованием Z_2 тоже должно быть целым числом, а это значит, что n следует представить как $4*k$, где k – это натуральное число. Получаем, что $M=4*5*4*k$, а $Z_2=5*k$. А так как Z_1 в 3 раза больше Z_2 , то получаем, что $Z_1=3*5*k$.

Теперь мы можем выразить X_1 . Итак, $X_1=5*5*k$, т.е. оно тоже целое.

Конечно, Y_1 тоже должно быть целым, следовательно, мы должны представить k , как $2*a$, где a – это тоже натуральное число.

Теперь рассчитаем X_2 . В наших обозначениях $X_0=9*4*2*a$. $X_1=5*5*2*a$. Получаем $X_2=a*(9*4*2-5*5*2)=a*(72-50)=a*22$. Но по условию $X_2\leq 40$, т.е. $a*22\leq 40$. А так как a – это натуральное число, то оно может принимать здесь только одно значение $a=1$.

В итоге мы получаем, что $M=4*5*4*2*1=160$. **То есть до кризиса в городе проживало 160 волшебников.**

б) Суммарный рыночный спрос – это сумма индивидуальных спросов. Сначала разберемся с групповыми функциями спроса волшебников:

1) Волшебники с высшим образованием. До кризиса их численность в городе N составляла $0,45*160=72$ человека. Значит их суммарный спрос будет равен $Q_x=72*(10-2P)=720-144P$. И они предъявляли спрос на волшебное зелье при цене ниже 5 рубликов.

2) Волшебники со средним образованием. До кризиса их численность в городе N составляла $0,3*160=48$ человек. Значит, их суммарный спрос будет равен $Q_y=48*(30-3P)=1440-144P$. И они предъявляли спрос на волшебное зелье при цене ниже 10 рубликов.

3) Волшебники с начальным образованием. До кризиса их численность в городе N составляла $0,25 \cdot 160 = 40$ человек. Значит, их суммарный спрос будет равен $Q_z = 40 \cdot (60 - 4P) = 2400 - 160P$. И они предъявляли спрос на волшебное зелье при цене ниже 15 рубликов.

Получаем, что при цене ниже 5 рубликов за литр, спрос на волшебное зелье предъявляли все волшебники, при цене от 5 до 10 рубликов – только волшебники со средним и начальным образованием, а при цене от 10 до 15 рубликов уже только волшебники с начальным образованием.

Функция суммарного рыночного спроса будет иметь вид:

$$Q = \begin{cases} 0 & \text{при } 15 \leq P \\ 2400 - 160P & \text{при } 10 \leq P \leq 15 \\ 3840 - 304P & \text{при } 5 \leq P \leq 10 \\ 4560 - 448P & \text{при } 0 \leq P \leq 5 \end{cases}$$

Ответ:

а) До кризиса в городе N проживало 160 волшебников.

б) До кризиса функция суммарного рыночного спроса волшебников на волшебное зелье имела вид:

$$Q = \begin{cases} 0 & \text{при } 15 \leq P \\ 2400 - 160P & \text{при } 10 \leq P \leq 15 \\ 3840 - 304P & \text{при } 5 \leq P \leq 10 \\ 4560 - 448P & \text{при } 0 \leq P \leq 5 \end{cases}$$

Задача 4. Выбираем пропорцию для салата.

Поселившись в стране Вега, Юный Экономист стал питаться исключительно салатом из помидоров и огурцов. Пропорция, при которой салат имеет приемлемый для Юного Экономиста вкус, не является жестко заданной. А именно, он готов есть салат, если в нем на 1 огурец приходится от $1/4$ до 4 помидоров. Полезность порции салата, полученной из 1 огурца и $k \in [1/4; 4]$ помидоров, равна для него \sqrt{k} . Юный Экономист располагает бюджетом в размере 1000 д.е. в неделю. Один огурец стоит 20 д.е., а помидор — вдвое дешевле. Полезность Юного Экономиста равна суммарной полезности от всех съеденных за неделю порций салата. Овощи в стране Вега бесконечно делимые.

а) Допустим, Юный Экономист решил готовить все порции салата в единой пропорции k помидоров на 1 огурец. Какое значение k он выберет, максимизируя свою полезность?

б) Может ли полезность Юного Экономиста увеличиться по сравнению с пунктом а), если он будет готовить одну часть порций салата в пропорции k_1 , а другую часть — в пропорции k_2 ?

Решение.

а) Стоимость одной порции салата составит для Юного экономиста $20 + 10k$ д.е., а значит, он сможет потребить $\frac{1000}{20+10k}$ порций. Полезность от каждой порции равна \sqrt{k} ,

а значит итоговая полезность ЮЭ будет равна

$$U(k) = \frac{100\sqrt{k}}{2+k}.$$

Нам нужно найти значение $k \in [1/4; 4]$, при котором значение этого выражения максимально. Это можно сделать стандартным методом — с помощью производной. Есть и решение, не требующее знания производной: разделим числитель и знаменатель на \sqrt{k} :

$$U(k) = \frac{100}{\sqrt{k} + 2/\sqrt{k}}.$$

Значение дроби максимально, когда знаменатель минимален. Заметим, однако, что $\sqrt{k} + 2/\sqrt{k} = (\sqrt[4]{k} - \sqrt{2}/\sqrt[4]{k})^2 + 2\sqrt{2}$. Поэтому знаменатель минимален тогда и только тогда, когда $\sqrt[4]{k} - \sqrt{2}/\sqrt[4]{k} = 0$, то есть $k = 2$. (Этот же результат можно было получить с помощью неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим.)

б) Первый способ:

Общие затраты на оба типа порций будут равны $(20 + 10k_1)x_1 + (20 + 10k_2)x_2 = 1000$. Общая полезность:

$$U = x_1\sqrt{k_1} + x_2\sqrt{k_2}.$$

Пусть x_1 и k_1 выбраны на каких-то произвольных (необязательно оптимальных) уровнях. Тогда $U = \text{const}_1 + x_2\sqrt{k_2}$, а расходы равны $\text{const}_2 + (2 + k_2)x_2 = 100$. Отсюда

$$U = \text{const}_1 + \frac{100 - \text{const}_2}{2 + k_2} \sqrt{k_2}.$$

Максимизируя эту функцию (она с точности до констант похожа на функцию в пункте а)) $k_2^* = 2$ независимо от k_1 . Аналогично $k_1^* = k_2^* = 2$ — ЮЭ не сможет получить больше полезности, так как он не будет пользоваться возможностью делать разные салаты.

Второй способ:

Докажем, что ЮЭ не может получить полезность больше, чем в а), то есть больше, чем $25\sqrt{2}$. Назовем «порциями первого типа» те, в которых пропорция помидоры: огурцы равна k_1 , а «порциями второго типа» те, в которых пропорция равна k_2 . Пусть ЮЭ готовит x_1 порций первого типа, и x_2 порций второго типа. Обозначим его расходы на порции первого типа за E_1 , а расходы на порции второго типа — за E_2 .

Полезность ЮЭ равна

$$U = x_1\sqrt{k_1} + x_2\sqrt{k_2} = \frac{E_1}{20+10k_1} \sqrt{k_1} + \frac{E_2}{20+10k_2} \sqrt{k_2}.$$

Заметим, однако, что из пункта а) мгновенно следует, что $\frac{\sqrt{k_1}}{20+10k_1} \frac{\sqrt{2}}{40}$ и $\frac{\sqrt{k_2}}{20+10k_2} \frac{\sqrt{2}}{40}$.

Поэтому

$$U \frac{\sqrt{2}}{40} E_1 + \frac{\sqrt{2}}{40} E_2 = \frac{\sqrt{2}}{40} (E_1 + E_2) = \frac{\sqrt{2}}{40} 1000 = 25\sqrt{2},$$

что и требовалось доказать.

Председатель оргкомитета,
начальник управления



В.Н. Щукин