XXIII Межрегиональный экономический фестиваль школьников «Сибириада. Шаг в мечту».
Олимпиада по экономике для учащихся 10х классов 02.03.2016.
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП. ЗАДАЧИ. РЕШЕБНИК.

Продолжительность работы – 150 минут.
Максимальное количество баллов за задачи – 100.
Каждая задача оценивается из 25 баллов.

Задача 1. Субсидия на велосипеды.

Спрос на велосипеды, который предъявляют две группы потребителей, описывается функциями $q_1 = 50 - 5p$ для первой группы и $q_2 = 64 - 4p$ для второй группы. В изначальном равновесии велосипеды покупают только потребители с высоким спросом. Чтобы стимулировать потребителей с низким спросом, государство вводит для них субсидию в размере 2 за каждый купленный велосипед. В новом равновесии велосипеды покупают обе группы потребителей, а равновесная цена увеличилась на 1, равно как и равновесное количество.

а) Выведите функцию предложения велосипедов, если известно, что она линейная.

б) Предположим, что государство вводит аналогичную субсидию и для второй группы потребителей. Чему станет равно количество велосипедов, купленных потребителями с низким спросом? Приведите содержательное экономическое объяснение того, в какую сторону изменилось это количество.

Решение

а) Выведем изначальный рыночный спрос на велосипеды.

$$Q^D = \begin{cases} 114 - 9p, & \text{если } p < 10 \\ 64 - 4p, & \text{если } 10 \le p \le 16 \\ 0, & \text{если } p > 16 \end{cases}$$

Пусть в изначальном равновесии установилась цена P (так как первая группа не покупает, то мы знаем что $P \ge 10$), и равновесное количество $Q = 64 - 4P$.

После введения субсидии для первой группы, рыночный спрос стал:

$$\mathrm{Q^D_{new}} = \begin{cases} 124 - 9\mathrm{p}, & \text{если p} < 12 \\ 64 - 4\mathrm{p}, & \text{если } 12 \le \mathrm{p} \le 16 \\ 0, & \text{если p} > 16 \end{cases}$$

Так как теперь покупают обе группы потребителей, а цена и равновесное количество увеличились на 1, то из системы уравнений находим равновесные параметры для обоих случаев:

$$\begin{cases} \mathrm{Q} = 64 - 4\mathrm{P} \\ \mathrm{Q} + 1 = 124 - 9(\mathrm{P} + 1) \end{cases}$$

$$\mathrm{P} = 10, \mathrm{Q} = 24; \mathrm{P} + 1 = 11, \mathrm{Q} + 1 = 25$$

Пусть функция спроса описывается уравнением $\mathrm{Q^S} = \mathrm{a} + \mathrm{bp}$. Тогда подставляя равновесные параметры в двух случаях, находим a и b:

$$\begin{cases} 24 = a + 10b \\ 25 = a + 11b \end{cases}$$

$$a = 14,\ b = 1 \ \rightarrow \ Q^S = 14 + p$$

б) Заметим, что в предыдущем случае после введения субсидии потребители с низким спросом покупали 5 единиц. Если субсидия вводится для всех покупателей, то рыночный спрос станет

$$Q^D_{new} = \begin{cases} 132 - 9p, & \text{если } p < 12 \\ 72 - 4p, & \text{если } 12 \le p \le 18 \\ 0, & \text{если } p > 18 \end{cases}$$

В пересечении с функций предложения получаем $p = 11{,}8$. При такой цене потребители с низким спросом покупают только 1 единицу "— меньше, чем раньше. Это объясняется тем, что повышение спроса со стороны второй группы увеличивает равновесную цену, что плохо для покупателей с низким спросом и заставляет их потреблять меньше.

Задача 2. Винтики и Шпунтики. [Юлия Жесткова]

Фирма Винтик&Co продает винтики по цене x за штуку и является монополистом на этом рынке. Спрос на винтики задается функций $Q = 360 - P$. Главной деталью для изготовления каждого винтика являются шпунтик, и кроме как стоимость шпунтика других переменных издержек не требуется. Винтик&Co закупает шпунтики у фирмы Шпунтик&Co по цене y за шпунтик. Предельные издержки изготовления одного шпунтика постоянны и равны 40, фиксированных издержек нет. **Найдите x и y, если известно, что больше никакие другие фирмы не производят ни шпунтики, ни винтики.**

Решение

Шпунтик&Co устанавливает цену на шпунтики, которую Винтик&Co воспринимает, как средние переменные издержки производства каждого винтика. Винтик&Co в свою очередь устанавливает цену на винтики, максимизируя свою прибыль:

$$\pi_{\text{В}} = (360 - x)(x - y) = -x^2 + x(y + 360) - 360y$$

Вершина параболы по формуле $-b/2a$ определяет максимум:

$$x = \frac{y + 360}{2}$$

По такой цене будет произведено и куплено: $Q = \frac{360 - y}{2}$ винтиков.

Для фирмы Шпунтик&Co это уравнение задаёт спрос на её продукцию. Фирма также устанавливает цену y максимизируя свою прибыль:

$$\pi_{\text{Ш}} = (y - 40)\frac{360 - y}{2} = -0.5y^2 + 200y - 7200$$

По формуле вершины параболы однозначно определяется y для достижения максимума прибыли:

$$y = 200 \ \rightarrow \ x = 280$$

Ответ: $x = 280,\ y = 200$.

Задача 3. Сапоги-скороходы.

В некотором царстве, в Тридесятом государстве жил-был царь Ерофей — любитель всяческих затей. И затеял он как-то раз модернизировать свою дружину —

обуть каждого дружинника в сапоги-скороходы. Было в его царстве 40 мастеров, которые шили такие сапоги. Приказал Ерофей изымать у каждого мастера половину от того количества, что он сошьет сверх 1 пары в месяц.

а) Сколько дружинников можно будет обуть за месяц, если каждый мастер продает сапоги-скороходы на рынке совершенной конкуренции и стремится максимизировать прибыль, спрос на них описывается функцией $Q_D = 600 - 10P$, где P — цена пары сапог (руб.), Q — величина спроса в месяц (пар). Издержки изготовления сапог-скороходов у всех мастеров задаются одинаковой функцией $TC = 2q^2 + 4q + 10$, где q "— количество пар сапог, изготавливаемых одним мастером за месяц.

б) Как изменится в результате введения натурального сбора общее количество сапог-скороходов, изготавливаемых в месяц в царстве Ерофея? Как изменится прибыль каждого мастера?

Решение

а) Введение натурального сбора, уплачиваемого производителями, изменит функцию рыночного предложения, следовательно, изменится цена и решение каждого производителя об объемах производства.

При любой цене производитель определяет объем производства так, чтобы максимизировать прибыль. Если каждый мастер производит q пар сапог, то продает он $\mathrm{q} - (\mathrm{q} - 1) \cdot 0.5$ пары. Тогда

$$\pi = \mathrm{P}(\mathrm{q} - (\mathrm{q} - 1) \cdot 0.5) - 2\mathrm{q}^2 - 4\mathrm{q} - 10 \rightarrow \max$$

$$0.5\mathrm{P} - 4 = 4\mathrm{q}$$

$$\mathrm{q}^* = \frac{0.5\mathrm{P} - 4}{4} = \frac{1}{8}\mathrm{P} - 1$$

Однако в данной ситуации объем производства не совпадает с объемом предложения. На рынке каждый мастер будет предлагать $\mathrm{q_s} = \mathrm{q}^* - (\mathrm{q}^* - 1) \cdot 0{,}5$

То есть

$$\mathrm{q_s} = \left(\frac{1}{8}\mathrm{P} - 1\right) - \left(\frac{1}{8}\mathrm{P} - 1 - 1\right) \cdot 0{,}5$$

$$\mathrm{q_s} = \frac{1}{16}\mathrm{P}$$

$$\mathrm{Q_S} = 40 \cdot \frac{1}{16}\mathrm{P} = 2{,}5\mathrm{P}$$

Найдем равновесную цену, равновесное количество и величину предложения одной фирмы:

$$600 - 10\mathrm{P} = 2{,}5\mathrm{P}$$

$$\mathrm{P} = 48$$

$$\mathrm{Q} = 120$$

$$\mathrm{q} = 3$$

То есть на рынке каждый мастер будет продавать 3 пары сапог, а производить:

$$\mathrm{q}^* = \frac{1}{8} \cdot 48 - 1 = 5$$

Значит, в виде налога каждым мастером будет уплачено 2 пары сапог (5 – 3 = 2, или иначе (5 – 1) · 0,5 = 2). Следовательно, можно будет обуть 80 дружинников (40 · 2 = 80).

Ответ: за месяц можно обуть 80 дружинников.

б) Прибыль каждого мастера после введения натурального налога:

$$\pi_1 = 48 \cdot 3 - 2 * 5^2 - 4 * 5 - 10 = 64$$

Определим объем производства каждого мастера и его прибыль до введения налога. Для этого определим функцию рыночного предложения и равновесную цену.

Предложение каждого мастера определяется из условия $\mathrm{P} = \mathrm{MC}$

$$\mathrm{P} = 4\mathrm{q} + 4$$

$$\mathrm{q_S} = \frac{\mathrm{P} - 4}{4}$$

$$\mathrm{Q_S} = 10\mathrm{P} - 40$$

$$600 - 10\mathrm{P} = 10\mathrm{P} - 40$$

$$\mathrm{P} = 32$$

$$\mathrm{Q} = 280$$

$$\mathrm{q} = 7$$

$$\pi_0 = 7 * 32 - 2 * 7^2 - 4 * 7 - 10 = 88$$

Ответ: количество сапог-скороходов, производимых в царстве Ерофея, после введения сбора сократилось на 160 пар, прибыль каждого мастера сократилась на 24 монеты.

Задача 4. Дискретный фактор производства

Для производства одной единицы товара X требуется одна единица труда, две единицы материала Y, и три единицы материала Z. Цена единицы труда равна 3 д.е., цена единицы материала Y — 2 д.е., а цена единицы материала Z — 1 д.е. Товар X производится на станках; в месяц на одном станке можно произвести максимум 30 000 ед. товара X. Стоимость аренды одного станка равна 120 000 д.е. в месяц. Кроме того, станок потребляет электроэнергию в расчете 1 квт-час на 1 единицу товара X. Стоимость 1 квт-час электроэнергии равна 1 д.е. Все переменные, кроме количества станков, могут принимать не только целые значения. *Количество станков может быть только целым числом*.

а) Обозначим за Q месячный объем производства товара X (в тыс. ед.). Выведите функцию общих издержек производства товара X за месяц, $TC(Q)$,(в тыс. д. е.). (Подсказка: возможно, для записи функции $TC(Q)$ вам понадобится обозначение $\lceil x \rceil$, где $\lceil x \rceil$ — наименьшее целое число, не меньшее x.)

б) Допустим, цена единицы товара X равна 12 д.е. Государство готово выплатить фирме субсидию в размере S тыс. д.е., если фирма выберет любой положительный объем производства. При каком минимальном значении S фирма выберет положительный объем производства? Чему будет равен этот объем?

Решение

а) Если фирма решит произвести Q единиц товара, ей придется арендовать $\lceil Q/30 \rceil$ станков, каждый стоимостью 120. Кроме того, на каждую из единиц остальные расходы составят $1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 11$ (заметим, что расходы на электроэнергию зависят непосредственно от числа произведенных единиц.) Таким образом, функция издержек имеет вид $TC(Q) = 11Q + 120\lceil Q/30 \rceil$.

б) Заметим, что если станок уже арендован, его выгодно загружать полностью, так как цена больше, чем дополнительные издержки на единицу: $12 > 11$. Таким образом, станок приносит выгоду в размере $(12 - 11) \cdot 30 = 30$ тыс. д.е. Издержки же на аренду станка равны 120 тыс. д.е., и поэтому в отсутствие субсидии фирма не будет открывать производство.

Если государство предложит субсидию в размере S за открытие производства, фирма в любом случае не будет арендовать больше одного станка, так как каждый последующий станок будет приносить лишь убыток, не изменяя величину субсидии.

Таким образом, мининимальная субсидия должна покрыть убытки от аренды одного станка, то есть $120 - 30 = 90$. При этой величине субсидии фирма арендует один станок и произведет 30 тыс. ед.

Ответ: $\boldsymbol{TC(Q) = 11Q + 120\lceil Q/30 \rceil}$; при величине субсидии 90 д.е. фирма арендует один станок и произведет 30 тыс. ед.

Председатель оргкомитета,
начальник управления

Министерство образования, науки и инновационной политики Новосибирской области
ДЛЯ ДОКУМЕНТОВ

В.Н. Щукин