

Олимпиада по экономике 10 класс.
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ТУР. ЗАДАЧИ.

РЕШЕБНИК

Время выполнения 150 минут

Всего за задачи 100 баллов

Задача 1. «ЖУЛЬЕН ИЗ МУХОМОРОВ» (20 БАЛЛОВ)

В Царстве лесных гномов ни одно праздничное застолье не обходится без жульена из мухоморов, который можно купить только в тавернах, где его готовят специально обученные повара по старинным рецептам, которые держатся в строжайшем секрете. Таверны работают в условиях рынка совершенной конкуренции, спрос и предложение на котором представлены линейными функциями.

Король гномов Урфин IV, фанатичный сторонник здорового образа жизни, решил ограничить потребление населением этих грибов, полагая, что такая традиция уже не первое столетие не лучшим образом сказывается на здоровье гномов. Не долго думая, он объявил, что, начиная с будущего понедельника, все продавцы мухоморового жульена должны будут платить налог по 3 ден. ед. за каждую проданную порцию.

На следующий день к Урфину пришел его министр финансов, фанатичный противник госдолга, и сказал:

Ваше Величество! Ваше решение, как всегда, гениально, однако в результате введения такого налога потребление сократится только лишь на 8 тыс. порций в месяц. Сейчас каждый месяц продается 28 тыс. порций по 5 ден. ед., а эластичность предложения в точке равновесия в 2 раза превышает эластичность спроса (по модулю). Я знаю, какой должна быть величина налога, чтобы еще больше сократить потребление и максимально увеличить доходы казны. И тогда мы, наконец, сможем вернуть весь наш долг эльфийскому королю!

Какую величину фиксированного потоварного налога рекомендовал ввести министр финансов?

Решение

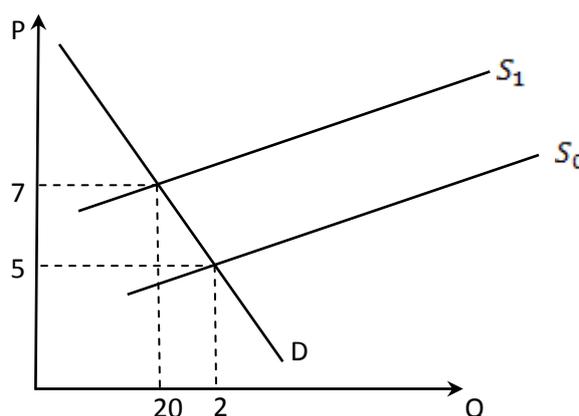
Утверждение: Если при линейных функциях спроса и предложения эластичность предложения в точке равновесия в 2 раза превышает эластичность спроса, то при введении фиксированного потоварного налога на продавцов цена поднимется на величину, равную $2/3T$ (T – величина налога).

Доказательство: Если $|E_S| = 2|E_D|$, то есть $\left| \frac{\partial Q_S}{\partial P} \cdot \frac{P^e}{Q^e} \right| = 2 \cdot \left| \frac{\partial Q_D}{\partial P} \cdot \frac{P^e}{Q^e} \right|$, то угловой коэффициент функции предложения в 2 раза превышает угловой коэффициент функции спроса: $Q_D = a - bP$, $Q_S = c + 2bP$. Тогда равновесная цена определяется как $P_0^e = \frac{a-c}{3b}$.

Если вводится налог в размере T ден. ед., уплачиваемый производителями, то $Q_D = a - bP$, $Q_S = c + 2b(P - T)$ и $P_1^e = \frac{a-c}{3b} + \frac{2}{3}T = P_0^e + \frac{2}{3}T$.

Следовательно, при $T=3$ новая цена будет равна 7 ден. ед., а новое равновесное количество 20 тыс. порций (по условию)

Теперь, зная координаты двух точек на линейной функции спроса (см. рис.), можем определить ее вид: $Q_D = 48 - 4P$. А значит угловой коэффициент функции предложения равен 8, и координат исходной точки равновесия достаточно, чтобы определить вид функции S_0 : $Q_S = -12 + 8P$.



Теперь не трудно определить величину налога, максимизирующего налоговые сборы. Пусть величина потоварного налога равна T ден. ед. Тогда $Q_S = -12 + 8(P - T)$, а так как функция спроса не меняется, то равновесное количество определяется как $Q^e = 28 - \frac{8}{3}T$. Максимизируем функцию налоговых поступлений: $TQ^e = 28T - \frac{8}{3}T^2 \rightarrow \max!$

$$28 - \frac{16}{3}T = 0 \rightarrow T = 5,25$$

Ответ: $T = 5,25$ ден. ед.

Задача 2. «М» (20 баллов)

Для производства 1 единицы уникального товара \mathbb{M} нужна 1 единица сырья стоимостью 17 д. е. и 1 единица труда стоимостью 3 д. е. Денежные ресурсы, которые фирма может потратить на закупку факторов производства, однако, не безграничны. Всего на счету фирмы в настоящий момент есть L д.е. Фирма может привлечь дополнительные средства, взяв в банке краткосрочный кредит по ставке r_c , вернуть который нужно после продажи товара. Также часть средств можно не вкладывать в производство, а положить на депозит по ставке r_d на тот же период. Если фирма назначит цену P на свою продукцию, то потребители будут готовы купить $52 - P$ единиц товара \mathbb{M} . Фирма максимизирует сумму денег, которая останется у нее после производства и продажи товара и расплаты с банком.

а) Допустим, $r_c = r_d = 10\%$. Найдите оптимальный выпуск фирмы как функцию от L . Постройте график этой функции.

б) Допустим, $r_c = 20\%$, $r_d = 10\%$. Найдите оптимальный выпуск фирмы как функцию от L . Постройте график этой функции.

Решение

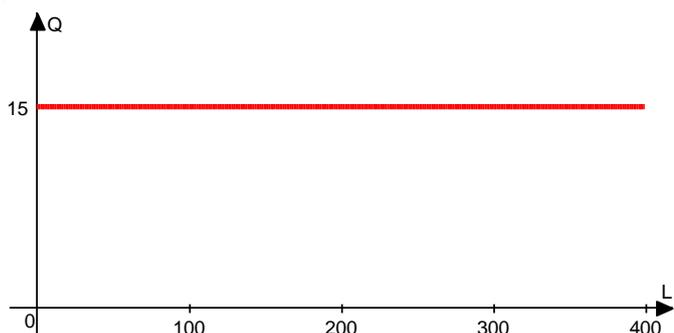
(а) Найдем функцию предельных издержек (с точки зрения суммы на счету в конце периода). «Производственные» предельные издержки, равны, очевидно, $17 + 3 = 20$ д.е. за единицу товара. Если для выпуска данной единицы нужно привлекать заемные средства, то кроме этих 20 д.е. фирме придется заплатить и процент: $r_c \cdot 20 = 0,1 \cdot 20 = 2$ д.е. Итого предельные издержки составят 22 д.е.

Если для выпуска данной единицы не нужно привлекать заемные средства, то производя эту единицу, фирма потеряет процент, который она могла бы получить, держа средства на депозите: $r_d \cdot 20 = 0,1 \cdot 20 = 2$ д.е. Итого предельные издержки составят 22 д.е.

Таким образом, независимо от L , предельные издержки фирмы постоянны и равны 22 д.е.

Функция предельного дохода также не зависит от L : $MR = 52 - 2Q$.

Пересекая предельный доход и предельные издержки, получаем, что, независимо от L , оптимальный выпуск равен 15. Итак, $Q^*(L) = const = 15$



(б). Вновь найдём (при данном L), функцию предельных издержек фирмы. Производственные издержки равны 20. Допустим, фирма решает произвести Q единиц продукции. Если денег хватает (при $20Q \leq L$), то фирма при производстве дополнительной единицы продукции теряет процент по депозитам. Предельные издержки равны $(1 + r_d) \cdot 20 = 22$ д.е. Если приходится привлекать заёмные средства (при $20Q > L$), то фирма при производстве дополнительной единицы продукции платит процент по кредиту, и предельные издержки равны $(1 + r_c) \cdot 20 = 24$ д.е.

Таким образом, функция предельных издержек имеет вид

$$MC(Q) = \begin{cases} 22, & Q < \frac{L}{20} \\ 24, & Q > \frac{L}{20} \end{cases}$$

График этой функции представляет собой «лесенку» из двух ступенек, причем точка перехода с нижней ступеньки на верхнюю зависит от L . Нарисуем пунктиром также вертикальную линию, соединяющую две ступеньки в точке $Q = \frac{L}{20}$.

При больших L (насколько больших, скажем ниже) точка пересечения графиков MR и MC будет находиться на нижней ступеньке:

$$MR = 52 - 2Q = 22, \text{ откуда } Q = 15. \text{ Это возможно, пока } 15 \leq \frac{L}{20}, \text{ то есть } L \geq 300.$$

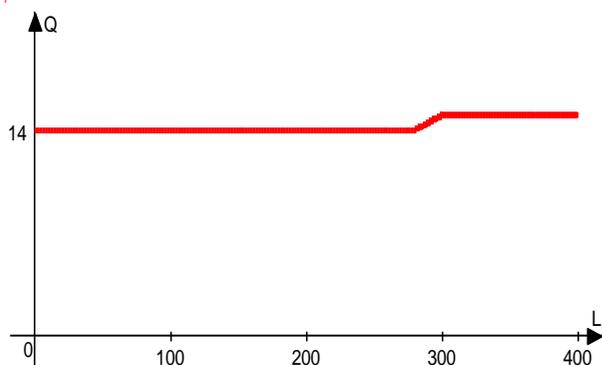
При маленьких L (насколько маленьких, скажем ниже) точка пересечения графиков MR и MC будет находиться на верхней ступеньке:

$$MR = 52 - 2Q = 24, \text{ откуда } Q = 14. \text{ Это возможно, пока } 14 \geq \frac{L}{20}, \text{ то есть } L \leq 280.$$

Что же будет происходить при $280 < L < 300$? Ответ прост: график MR будет пересекать пунктирную вертикальную линию, которую мы нарисовали. Нетрудно понять, что именно эта точка будет оптимальной для фирмы: прибыль возрастает справа от нее и убывает слева. Таким образом, оптимальный выпуск в этом случае просто равен $\frac{L}{20}$.

Итак, оптимальный выпуск как функция от L задаётся уравнением

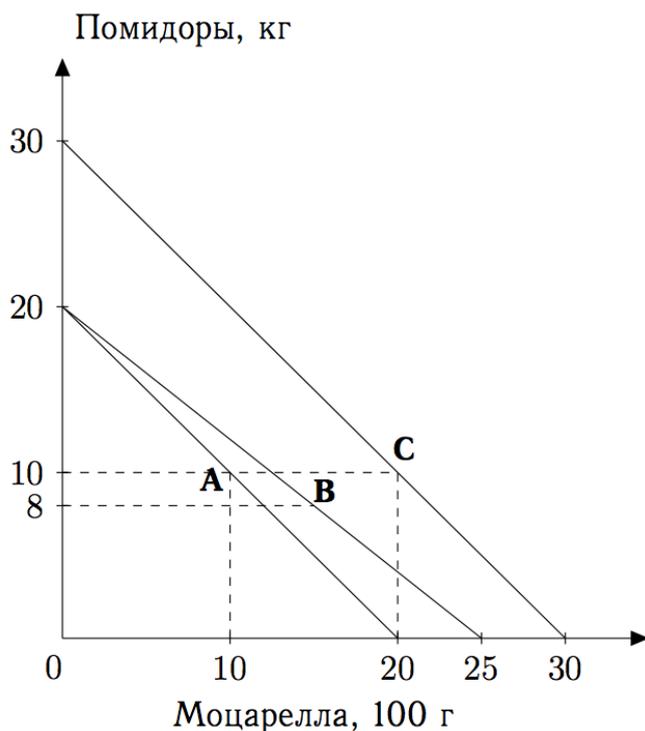
$$Q^*(L) = \begin{cases} 14, & L \leq 280 \\ L/20, & 280 < L < 300 \\ 15, & 300 \leq L \end{cases}$$



Задача 3. «КАПРЕЗЕ» (20 БАЛЛОВ)

Укаждогочеловекаестьсвоипричуды. Баба Валя — скромная пенсионерка, которая все, что остается от пенсии после квартплаты, тратит на продукты: помидоры и моцареллу. Как и многие пожилые люди, она консервативна: покупает только итальянскую моцареллу, несмотря на то, что в продаже появился такой же сыр отечественного производства, и только российские помидоры по 100 руб. за 1 кг, несмотря на наличие более дешевых китайских. В последнее время произошли только два события, повлиявшие на поведение бабы Вали: сначала на валютном рынке сильно подешевел рубль, а затем правительство щедро повысило пенсии.

На рисунке представлены бюджетные ограничения до, между и после этих событий. Точки А, В и С на рисунке — точки выбора бабы Вали при разных ситуациях.



а) Укажите ситуации, которым соответствует каждая из этих трех точек. Объясните ваши ответы.

б) Посчитайте расходы бабы Вали на моцареллу в каждом случае.

в) Внучка подарила бабе Вале бутылку оливкового масла и посоветовала есть помидоры и моцареллу только в составе салата *капрезе* (нужно взять одинаковые по весу количества помидор и моцареллы и добавить немного масла). Бабе Вале так понравился салат, что она решила есть только его, причем как можно больше. Отметьте на графике выбор бабы Вали после повышения пенсии и укажите координаты отмеченной точки.

Решение

1. Первое изменение связано со снижением курса рубля. Помидоры – российские, а моцарелла – итальянская. Поскольку теперь требуется больше рублей для покупки моцареллы, цена которой в иностранной валюте остается прежней, моцарелла станет дороже. Возможности б. Вали покупать помидоры не изменятся, а моцареллы она сможет купить меньше. Бюджетная линия сдвинется ближе к началу координат по оси X (точка пересечения с осью Y не изменится). Таким образом, набор В соответствует исходной ситуации, а набор А – выбору в условиях снижения курса рубля.

Повышение пенсии увеличит возможности покупки как помидор, так и моцареллы, что будет выражаться пропорциональным смещением бюджетной линии дальше от начала координат. Следовательно, т.В соответствует выбору после повышения пенсии.

2. Посчитаем расходы на моцареллу.

XXI МЕЖРЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ФЕСТИВАЛЬ ШКОЛЬНИКОВ
«СИБИРИАДА. ШАГ В МЕЧТУ»

А) исходная ситуация. Бюджетная линия выражается уравнением $y = 20 - 0,8x$. $y = 8, \Rightarrow x = 15$. Баба Валя покупает 1,5 кг моцареллы. На свои бюджет она может купить 20 кг. помидор по цене 100 руб. за кг. Следовательно, ее бюджетные возможности соответствуют 2000 руб. Тогда цена моцареллы $p_x = \frac{2000}{25} = 80$ руб. за 100 гр., а расходы $15 \cdot 80 = 1200$ руб.

Б) ситуация со снижением курса рубля. Бюджетная линия $y = 20 - x$, набор А состоит из 10 кг. помидор и 1 кг. моцареллы. Цена моцареллы $p_x = \frac{2000}{20} = 100$ руб. за 100 гр. Расходы: $100 \cdot 10 = 1000$ руб.

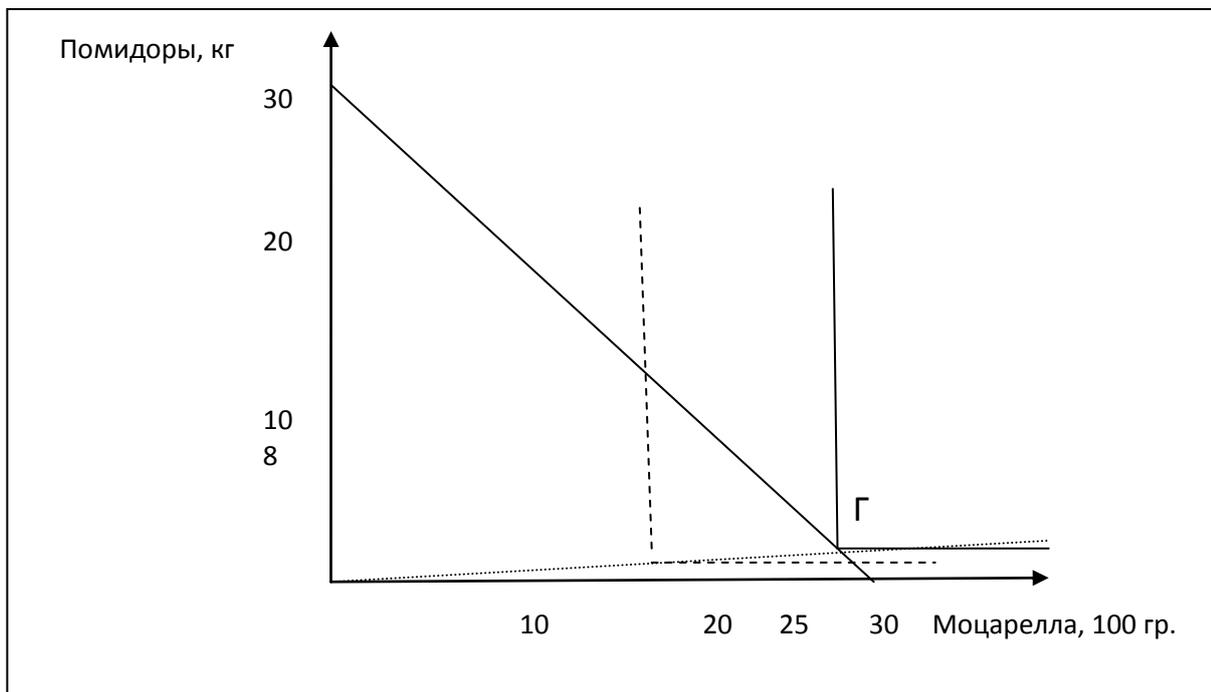
В) ситуация с ростом пенсии. Новая бюджетная линия описывается уравнением $y = 30 - x$, стало быть, теперь бюджет (при ценах на помидоры и моцареллу как в случае Б) равен 3000 руб. Баба Валя покупает 10 кг. помидор и 2 кг моцареллы. Расходы на моцареллу: $20 \cdot 100 = 2000$

Если б. Валя после слов внучки потребляет исключительно капрезе, помидоры и моцарелла становятся абсолютными комплементами. Поскольку пропорция продуктов в рецепте 1:1, карта безразличия представляет собой прямые углы с вершиной на оси $y = 0,1x$. Найдем наилучший набор для т. Вали:

$$30 - x = 0,1x \Rightarrow x = 27, (27)$$

$$y = 30 - 27, (27) = 2, (72)$$

графически



Задача 4. «УБОРКА В ОБЩЕЖИТИИ» (20 БАЛЛОВ)

Победив в олимпиаде, Алексей и Михаил стали студентами крупного экономического вуза в городе М. и поселились в одной комнате в общежитии. Ребята договорились убираться в комнате каждую неделю по субботам. Итоговая чистота комнаты (обозначим ее за G) зависит от того, сколько усилий каждый из них прикладывает к уборке. Обозначим эти уровни усилий за x_a (для Алексея) и x_m (для Михаила). Для простоты будем считать, что $G = x_a + x_m$.

XXI МЕЖРЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ФЕСТИВАЛЬ ШКОЛЬНИКОВ
«СИБИРИАДА. ШАГ В МЕЧТУ»

Каждый из студентов хотел бы, чтобы комната была чистой, однако оба не любят убираться, причем Алексей не любит уборку вдвое сильнее, чем Михаил. Это отражено в их функциях полезности: полезность Михаила равна $G \cdot (8 - x_m)$, а полезность Алексея имеет вид $G \cdot (8 - 2x_a)$.

Расписание устроено так, что по субботам в первой половине дня в комнате отсутствует Алексей, а во второй — Михаил. Когда Алексей приходит с учебы, он видит «промежуточную» степень чистоты комнаты (равную уровню усилий Михаила) и принимает решение о том, сколько усилий приложить для завершения уборки.

а) Каковы будут уровни усилий, которые будут прикладывать Алексей и Михаил к уборке? Каков будет итоговый уровень чистоты комнаты?

б) Могут ли ребята договориться об уровнях усилий так, чтобы обоим стало лучше по сравнению с результатом пункта а)? Верно ли, что при этом комната непременно будет чище, чем в пункте а)?

Решение:

(а) Принимая решение первым, Михаил может рассчитать ответные действия Алексея и выбрать уровень усилий таким образом, чтобы с учетом этих ответных действий максимизировать свою выгоду.

Полезность Алексея имеет вид: $U_a = (x_a + x_m)(8 - 2x_a)$. Относительно выбираемой переменной x_a это парабола с ветвями вниз, она имеет вершину в точке $x_a^* = (4 - x_m)/2$ (при $x_m < 4$).

Подставляя это в полезность Михаила, получаем: $U_m = ((4 - x_m)/2 + x_m)(8 - x_m)$. Это также парабола с ветвями вниз, она имеет вершину в точке $x_m^* = 2$. Получаем, что $x_a^* = 1$, $G^* = 3$.

(б) Полезности обоих ребят в а) равны 18. Легко привести примеры уровней усилий такие, что полезности обоих больше, чем 18. Например, если каждый будет убираться немного больше (скажем, $x_m = 3$, $x_a = 2$), то полезность Михаила вырастет до 25, а полезность Алексея — до 20. Комната при этом будет чище.

Можно ли привести пример такой пары уровней усилий, что обоим лучше по сравнению с а), но комната оказывается грязнее, чем в а)? Докажем, что сделать этого нельзя.

Имеем систему

$$\begin{cases} U_m = (x_a + x_m)(8 - x_m) > 18 \\ U_a = (x_a + x_m)(8 - 2x_a) > 18 \end{cases}$$

Если при каких-то уровнях усилий (x_a, x_m) полезность Алексея оказалась больше, чем 18, то максимальная полезность Алексея при уровне усилий Михаила, равном x_m , и подавно должна оказаться больше 18. Подставляя функцию наилучшего ответа Алексея $x_a = \frac{4 - x_m}{2}$, в его полезность, получаем, что максимально достижимая полезность Алексея равна

$$U_a^{\max}(x_m) = \frac{(4 + x_m)^2}{2}.$$

Поэтому из второго уравнения системы следует, что $\frac{(4 + x_m)^2}{2} > 18$, откуда $x_m > 2$.

Это означает, что в левой части первого уравнения системы второй множитель меньше 6. Поскольку произведение должно оказаться больше 18, первый множитель (чистота комнаты) должен быть больше 3, что и означает, что комната должна оказаться чище, чем в (а).

Итак, обоим может стать лучше только в случае, если комната окажется чище.

Задача 5. «КРЕДИТ САМОМУ СЕБЕ» (20 БАЛЛОВ)

Среди способов легкого обогащения, множество которых можно найти в интернете, есть, например, такой. Нужно прийти в банк, взять кредит на миллиард долларов, на полученные деньги купить этот банк и разрешить себе не возвращать кредит. С какими проблемами может столкнуться тот, кто попытается реализовать такой план?

Решение

1. Никакой банк не сможет выдать кредит, сумма которого сравнима со стоимостью этого банка.
2. Даже если такой кредит получить удастся, после покупки банка нельзя будет «разрешить себе» его не возвращать: кредит будет выдан из каких-то пассивов банка (например, депозитов, размещенных в нем), которые придется возвращать вкладчикам.

Начальник управления образовательной политики
министерства образования, науки и
инновационной политики Новосибирской области



В.Н. Щукин