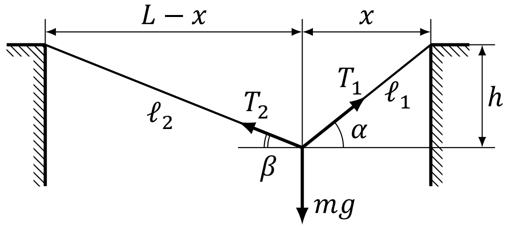
Возможные решения задач
9 класс

Задача 1. Над пропастью держись



Запишем силы, действующие на кусок жгута, на котором стоит канатаходец: вес канатоходца, равный mg, сила натяжения T_1 от правой части остального жгута и T_2 от левой части (см. рисунок). Обозначим углы, образуемые правым и левым концами жгута с горизонталью за α и β соответственно. Канатоходец движется медленно, поэтому можно считать, что в каждый момент система находится в равновесии. Условием этого является равенство нулю равнодействующей сил. В проекции на горизонтальную ось:

$$T_1 \cos\alpha = T_2 \cos\beta. \tag{1}$$

Обозначим жёсткости правой и левой части жгута за k_1 и k_2, а их длины (в растянутом состоянии) за ℓ_1 и ℓ_2 соответственно. Тогда можем записать силы натяжения через абсолютные удлинения (начальной длиной пренебрегаем):

$$T_1 \cos\alpha = k_1 \ell_1 \frac{x}{\ell_1} = k_1 x, \tag{2}$$

$$T_2 \cos\beta = k_2 \ell_2 \frac{L-x}{\ell_2} = k_2 (L-x), \tag{3}$$

$$k_1 x = k_2 (L-x). \tag{4}$$

Это равенство должно выполняться при любом m, в том числе при $m = 0$ (канатоходца нет). Пусть сила натяжения жгута без канатоходца равна T. Тогда

$$k_1 x = k_2 (L-x) = T = kL. \tag{5}$$

Перейдём к проекции сил на вертикальную ось:

$$mg = T_1 \sin\alpha + T_2 \sin\beta = k_1 \ell_1 \frac{h}{\ell_1} + k_2 \ell_2 \frac{h}{\ell_2} = (k_1 + k_2) h. \tag{6}$$

Выражаем жёсткости из (5) и получаем ответ:

$$h = \frac{mg}{k_1 + k_2} = \frac{mg}{\frac{kL}{x} + \frac{kL}{L-x}} = \frac{mgx(L-x)}{kL^2}. \tag{7}$$

Таким образом, канатоходец будет двигаться по параболе.

<u>**Ответ:**</u> $h(x) = \dfrac{mgx(L-x)}{kL^2}$.

Задача 2. Целковый и четвертушка

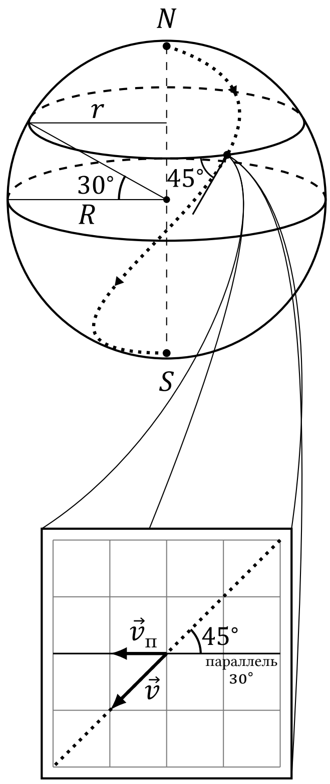
Найдём, как электрическое сопротивление усечённого конуса зависит от его размеров. Применим метод размерностей. Сопротивление конуса R, [Ом] должно выражаться через удельное сопротивление материала ρ, [Ом · м] и его геометрические параметры. Поскольку форма конуса от размера не зависит, достаточно одной размерной величины для описания всей этой фигуры. Логично выбрать на эту роль высоту усечённого конуса H, [м]. Таким образом, сопротивление конуса должно выражаться по формуле

$$R = C\frac{\rho}{H}, \tag{8}$$

где C — какая-то безразмерная константа, определяемая формой конуса. Получили, что сопротивление усечённого конуса обратно пропорционально его линейным размерам. Значит, сопротивление маленького конуса в 4 раза больше сопротивления большого. Вторая конструкция состоит из 4 последовательно соединённых маленьких конусов, поэтому её сопротивление в $4 \cdot 4 = 16$ раз больше сопротивления первой и равно $16 \cdot 16$ Ом $= 256$ Ом.

Ответ: Омметр покажет 256 Ом.

Задача 3. Пунктуальный Санта



Орбитальным движением Земли в этой задаче можно пренебречь, так как оно имеет много меньшую частоту, чем вращение планеты вокруг своей оси. В таком случае «меридиан полуночи» обойдёт планету за сутки. Его угловая частота будет равна

$$\Omega = \frac{2\pi}{T}, \tag{9}$$

где $T = 24$ ч. Чтобы оставаться на этом меридиане, Санта должен двигаться вокруг Земной оси с той же угловой частотой. Находясь на параллели 30°, для этого нужно двигаться вдоль параллели со скоростью

$$v_п = \Omega r = \Omega R \cos 30° = \sqrt{3}\frac{\pi R}{T}, \tag{10}$$

где R — радиус Земли. Зная угол, под которым Санта пересёк эту параллель, и проекцию на неё, можем найти величину полной скорости:

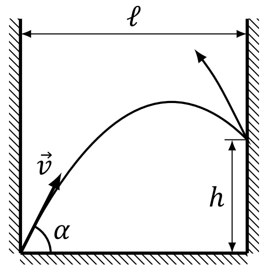
$$v = \frac{v_п}{\cos 45°} = \sqrt{6}\frac{\pi R}{T}. \tag{11}$$

Обратный перелёт происходил по полуокружности и занял

$$t = \frac{\pi R}{v} = \frac{T}{\sqrt{6}} = \frac{24 \text{ ч}}{\sqrt{6}} \approx 9 \text{ ч } 48 \text{ мин}. \tag{12}$$

<u>Ответ:</u> Обратный перелёт занял 9 ч 48 мин.

Задача 4. Представьте себе



Найдём максимальную высоту, на которую может подняться кузнечик за один прыжок. Подъём возможен тогда и только тогда, когда эта высота положительна. Обозначим расстояние между стенами за ℓ, модуль начальной скорости за v, а её угол от горизонтали за α. Время полёта от одной стены до другой выразим через горизонтальную проекцию скорости, которая постоянна на всём полёте:

$$t = \frac{\ell}{v_x} = \frac{\ell}{v\cos\alpha}. \tag{13}$$

Высоту подъёма найдём из уравнения равноускоренного движения по вертикали:

$$\begin{aligned} h &= v_y t - \frac{gt^2}{2} = v\sin\alpha\frac{\ell}{v\cos\alpha} - \frac{g\ell^2}{2v^2}\frac{1}{\cos^2\alpha} = \ell\operatorname{tg}\alpha - \frac{g\ell^2}{2v^2}(1+\operatorname{tg}^2\alpha) \\ &= -\tfrac{g\ell^2}{2v^2}\operatorname{tg}^2\alpha + \ell\operatorname{tg}\alpha - \tfrac{g\ell^2}{2v^2}. \end{aligned} \tag{14}$$

Получили, что высота подъёма зависит от тангенса угла прыжка квадратично. Графиком такой зависимости является парабола с ветвями вниз. Её вершина расположена между корнями в точке $\frac{-b}{2a}$. Таким образом

$$\operatorname{tg}\alpha_{max} = \frac{-\ell}{2\left(-\frac{g\ell^2}{2v^2}\right)} = \frac{v^2}{g\ell}, \tag{15}$$

$$h_{max} = -\frac{g\ell^2}{2v^2}\left(\frac{v^2}{g\ell}\right)^2 + \ell\frac{v^2}{g\ell} - \frac{g\ell^2}{2v^2} = \frac{\ell}{2}\left(\frac{v^2}{g\ell} - \frac{g\ell}{v^2}\right). \tag{16}$$

Как было сказано выше, нас интересует $h_{max} > 0$, то есть

$$\frac{v^2}{g\ell} > \frac{g\ell}{v^2}, \tag{17}$$

$$v > \sqrt{g\ell}. \tag{18}$$

Осталось найти ℓ. Для этого рассмотрим подъём на стену за 20 прыжков. Будем считать, что все прыжки были совершены на максимальную высоту (если последний прыжок избыточен, ошибка будет невелика). Обозначим высоту стен за H, тогда $h_{max} = H/20$. Из этого можем найти ℓ:

$$\frac{\ell}{2}\left(\frac{v^2}{g\ell} - \frac{g\ell}{v^2}\right) = \frac{H}{20}, \tag{19}$$

$$\frac{g}{v^2}\ell^2 = \frac{v^2}{g} - \frac{H}{10}, \tag{20}$$

$$\ell = \frac{v^2}{g}\sqrt{1 - \frac{Hg}{10v^2}} = \frac{(4\text{ м/с})^2}{10\text{ м/с}^2}\sqrt{1 - \frac{15\text{ м}\cdot 10\text{ м/с}^2}{10\cdot(4\text{ м/с})^2}} = 0{,}4\text{ м}. \tag{21}$$

Подставляем в (18) и получаем ответ:

$$v > \sqrt{10\text{ м/с}^2\cdot 0{,}4\text{ м}} = 2\text{ м/с}. \tag{22}$$

<u>Ответ:</u> Подъём возможен при скорости прыжка больше 2 м/с.

Задача 5. Нагреватель, найденный в ванне

Опишем установившийся режим в этой системе качественно. Температура не опускается ниже T_1, но нагреватель не может работать дольше минуты при температуре выше T_1. Значит, нагреватель должен включаться, когда температура становится ровно T_1, а следующие $t_{\text{нагр.}} = 60$ с работать «по инерции». После этого нагреватель выключается, и происходит остывание воды обратно до T_1 за время $t_{\text{ост.}} = 80$ с. Затем процесс повторяется.

Перейдём к количественному описанию процесса. Обозначим можность нагревателя за P, полную теплоёмкость системы (ванна + вода) за C, а максимальную температуру в установившемся режиме за T_2. По условию, мощность теплопотерь пропорциональна разности температуры ванны T и окружающей среды T_0, то есть можем записать

$$P_{\text{пот.}} = \alpha(T - T_0), \tag{23}$$

где α — некоторый размерный коэффициент. Заметим, что если нагрев от T_0 до T_1 занял несколько часов, а мы рассматриваем промежутки работы нагревателя порядка 1 мин, то периодические изменения температуры в установившемся режиме будут много меньше $T_1 - T_0$. Это значит, что мощность теплопотерь будет мало отличаться от своего значения при T_1, то есть в установившемся режиме её можно считать постоянной. Запишем уравнения теплового баланса для мощностей:

$$(P - P_{\text{пот.}})t_{\text{нагр.}} = C(T_2 - T_1), \tag{24}$$

$$-P_{\text{пот.}}t_{\text{ост.}} = C(T_1 - T_2), \tag{25}$$

где $t_{\text{нагр.}} = 60$ с, $t_{\text{ост.}} = 80$ с. Найдём отношение мощностей:

$$(P - P_{\text{пот.}})t_{\text{нагр.}} = P_{\text{пот.}}t_{\text{ост.}}, \tag{26}$$

$$\frac{P}{P_{\text{пот.}}} = 1 + \frac{t_{\text{ост.}}}{t_{\text{нагр.}}} = 1 + \frac{80}{60} = \frac{7}{3}. \tag{27}$$

Пусть без термодатчика нагреватель поддерживает температуру T_3. В этом режиме мощность теплопотерь равна мощности нагревателя, то есть

$$P^*_{\text{пот.}} = \alpha(T_3 - T_0) = P. \tag{28}$$

С другой стороны,

$$P = \frac{7}{3}P_{\text{пот.}} = \frac{7}{3}\alpha(T_1 - T_0). \tag{29}$$

Приравниваем и выражаем T_3:

$$\alpha(T_3 - T_0) = \frac{7}{3}\alpha(T_1 - T_0), \tag{30}$$

$$T_3 = \frac{7T_1 - 4T_0}{3} = 55°\text{C}. \tag{31}$$

Ответ: Максимальная температура равна 55°C.