Возможные решения задач
8 класс

Задача 1. Сверху вниз

Пусть Вася за время подъёма T проехал вверх $S^{\uparrow}{}_{\text{В}}$ со скоростью $v_{\text{В}}$, и вниз $S^{\downarrow}_{\text{В}}$ со скоростью $3v_{\text{В}}$. Из условия известно, что Вася поднимался три четверти времени, то есть

$$S^{\uparrow}_{\text{В}} = \frac{3}{4}\,T \cdot v_{\text{В}} \qquad S^{\downarrow}_{\text{В}} = \frac{1}{4}\ \cdot 3v_{\text{В}}. \tag{1}$$

Отсюда видно, Вася проехал вверх такой же путь как и вниз:

$$S^{\uparrow}_{\text{В}} = S^{\downarrow}_{\text{В}}. \tag{2}$$

Это значит что на то, чтобы вернуться с холма потребуется такое же время как и на подъём.

Паша всю дорогу поднимался вверх, поэтому на обратный путь он потратит в два раза меньше времени, чем на подъём. То есть Паша спустится в два раза быстрее, чем Вася.

Ответ: Паша спустится в два раза быстрее, чем Вася.

Задача 2. Удобный матрас

Высота, на которую лилипут массы m продавливает матрас жёсткости k

$$\Delta h \sim \frac{mg}{k}, \tag{3}$$

а доля высоты

$$\frac{\Delta h}{h} \sim \frac{mg}{kh}. \tag{4}$$

Большой матрас имеет такую же форму как маленький, но в 12 раз больше, значит он состоит из 12^3 маленьких. Посчитаем жёсткость большого матраса. У одного «слоя» маленьких матрасов жёсткость $12^2\cdot$. Жёсткость 12 последовательно соединённых слоёв жёсткости $12^2 \cdot k$ каждый, равна $\frac{1}{12} \cdot 12^2 \cdot k$. То есть жёсткость большого матраса равна

$$K = 12 \cdot k \tag{5}$$

Определим теперь долю, на которую Гулливер продавливает большой матрас, собранный из маленьких.

$$\frac{\Delta H}{H} \sim \frac{Mg}{KH}, \tag{6}$$

здесь H — высота большого матраса, M — масса гулливера. Из подобия $M = 12^3 m$, $H = 12h$. То есть

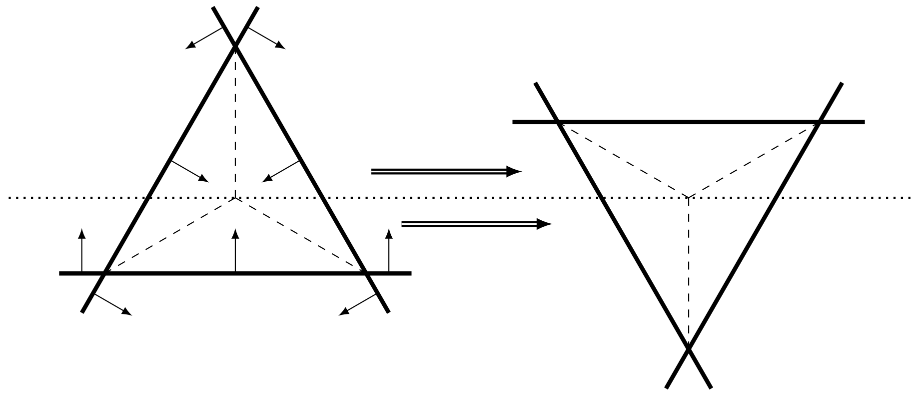
$$\frac{\Delta H}{H} \sim \frac{12^3 mg}{12k \cdot 12h} = 12\frac{mg}{kh} \tag{7}$$

Таким образом, чтобы Гулливер продавил матрас на такую же долю высоты как и лилипут, жёсткость маленького матраса должна быть в 12 раз больше, чем обычно. То есть жёсткость пружин, из которых состоит маленький матрас следует увеличить в 12 раз.

Ответ: Жёсткость пружин, из которых состоит маленький матрас следует увеличить в 12 раз

Задача 3. Переворот

Заметим, что центральная точка треугольника неподвижна из соображений симметрии. На рисунке показан вид треугольника после переворота



Когда треугольник перевернулся, каждый из стержней прошёл удвоенное расстояние до центра r. В равностороннем треугольнике расстояние от центра до стороны равно $r = \frac{\sqrt{3}}{6}a$, значит треугольник перевернётся через

$$t = \frac{2r}{v} = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{a}{v} \tag{8}$$

<u>Ответ:</u> треугольник перевернётся через $t = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{a}{v}$

Примечание: расстояние от центра равностороннего треугольника до стороны можно посчитать, например, как высоту в «маленьком» треугольнике (который получается, если провести отрезки из центра к вершинам).

Опустим высоту OH в треугольнике AOB. Треугольник равнобедренный, значит высота делит основание на два одинаковых отрезка, то есть $AH = AB = \frac{1}{2}a$ Получившийся треугольник AOH прямоугольный, с углом $30°$. Значит

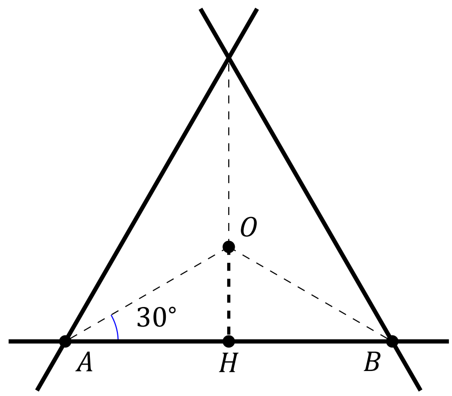
$$OH = \frac{1}{2}OA \tag{9}$$

По теореме Пифагора

$$AH^2 + OH^2 = OA^2 \tag{10}$$

применяя (9), получим, что

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + OH^2 = (2OH)^2 \tag{11}$$

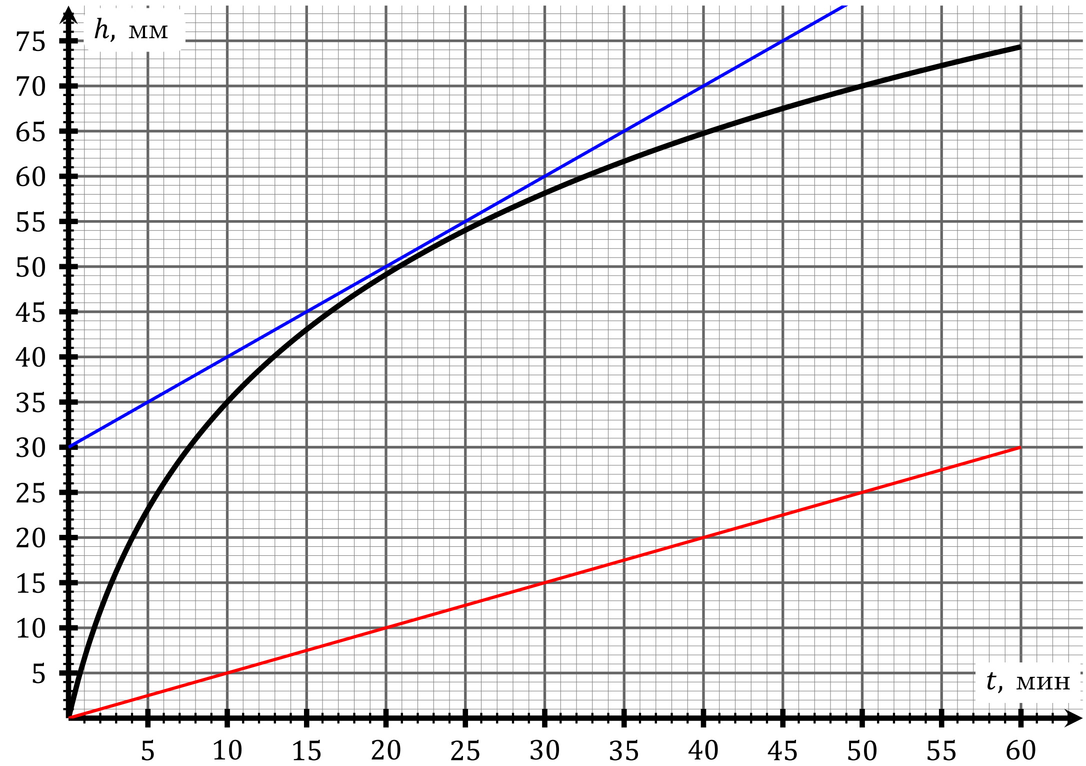


значит

$$3OH^2 = \frac{a^2}{4} \Rightarrow OH = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6} = r \tag{12}$$

Задача 4. Очень сильный дождь

Система ливневой канализации отводит от квадратного метра дороги 1 л в минуту, что соответствует уровню выпавших осадков в 1 мм. Проведём на графике прямую, которые соответствуют зависимости количества воды, которую отводит неисправная система канализации от времени (красная прямая). Подставив точку 10 минут определим, что канал переполняется, когда в нём оказывается 30 мм воды. Используя это наблюдение, можно провести прямую, которая соответствуют максимально допустимому уровню воды в канале в зависимости от переполнения при исправной канализации (синяя прямая).

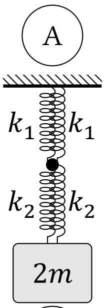


Видно, что график целиком находится ниже максимально допустимого количества осадков, а это значит, что переполнения не произойдёт.

Ответ: Исправная система канализации справилась бы с таким дождём.

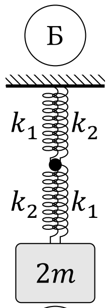
Задача 5. Неудобный безмен

Безмен состоит из двух пружинок, которые внешне неотличимы, поэтому и у первой системы и у второй есть два варианта. Обозначим жёсткости пружинок за k_1 и k_2 и посчитаем из закона Гука удлинение для каждого из вариантов подвешивания.



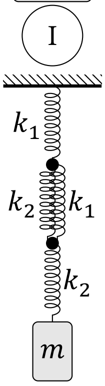
$$\frac{1}{k} = \frac{1}{2k_1} + \frac{1}{2k_2} \tag{13}$$

$$\Delta x = mg \cdot \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right) \tag{14}$$



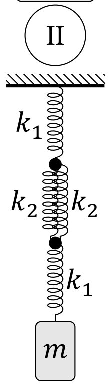
$$\frac{1}{k} = \frac{2}{k_1 + k_2} \tag{15}$$

$$\Delta x = mg \cdot \left(\frac{4}{k_1 + k_2}\right) \tag{16}$$



$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_1 + k_2} \tag{17}$$

$$\Delta x = mg \cdot \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_1 + k_2}\right) \tag{18}$$



$$\frac{1}{k} = \frac{2}{k_1} + \frac{1}{2k_2} \tag{19}$$

$$\Delta x = mg \cdot \left(\frac{2}{k_1} + \frac{1}{2k_2}\right) \tag{20}$$

Теперь надо разобрать все возможные пары и понять при каком соотношении жёсткостей удлинения могут совпадать. Первый случай АI:

$$\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_1 + k_2} \Rightarrow \frac{1}{k_1 + k_2} = 0, \tag{21}$$

жёсткости положительные, поэтому такого быть не может. Следующий случай БI

$$\frac{4}{k_1 + k_2} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_1 + k_2} \Rightarrow \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} - \frac{3}{k_1 + k_2} = 0, \tag{22}$$

умножим обе части равенства на $k_1 k_2 (k_1 + k_2)$

$$k_2(k_1 + k_2) + k_2(k_1 + k_2) - 3k_1 k_2 = 0 \Rightarrow k_1^2 + k_2^2 - k_1 k_2 = 0 \Rightarrow (k_1 - k_2)^2 + k_1 k_2 = 0 \tag{23}$$

Этот случай тоже не подходит. Теперь АII

$$\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{2}{k_2} + \frac{1}{2k_2} \Rightarrow \frac{1}{k_1} - \frac{1}{2k_2} = 0 \Rightarrow \boxed{k_1 = 2k_2} \tag{24}$$

Осталось разобрать Б2

$$\frac{4}{k_1 + k_2} = \frac{2}{k_2} + \frac{1}{2k_2} \tag{25}$$

умножим обе части равенства на $2k_1 k_2 (k_1 + k_2)$

$$8k_1 k_2 = 4k_2(k_1 + k_2) + k_1(k_2 + k_1) \Rightarrow 4k_2^2 - 3k_1 k_2 + k_1^2 = 0 \Rightarrow (2k_2 - k_1)^2 + k_1 k_2 = 0 \tag{26}$$

Получилось, что единственное возможное отношение $1 : 2$

Ответ: жёсткости пружин относятся как $1 : 2$

Задача 6. Равновесные поршни

Пусть после того, как по средний поршень положили грузик массой m_2, он опустился на Δh_2, а боковые поднялись на Δh_1 и Δh_3. Объём всей воды в сосуде не изменился, поэтому

$$\Delta h_1 + \Delta h_3 = \Delta h_2 \tag{27}$$

Запишем как изменилось давление на дно, посчитанное в разных сосудах. В левом сосуде уровень жидкости поднялся на Δh_1 и пружина растянулась на Δh_1 от положения равновесия, что создало избыточное давление k/S. Отдельно стоит подчеркнуть, поршень находился в положении равновесия, а значит сила Гука была скомпенсирована силой тяжести, а при дальнейшем растяжении учитывать массы не нужно. Таким образом изменение давления на дно в левом сосуде

$$\Delta P_1 = \rho g \Delta h_1 + \frac{k\Delta h_1}{S}. \tag{28}$$

В правом сосуде всё точно так же.

$$\Delta P_3 = \rho g \Delta h_3 + \frac{k\Delta h_3}{S} \tag{29}$$

В жидкости на одной высоте давления одинаковы, поэтому

$$\Delta P_1 = \Delta P_2 \Rightarrow \Delta h_1 = \Delta h_3, \tag{30}$$

а если учесть (27)

$$\Delta h_1 = \Delta h_3 = \frac{1}{2}\Delta h_2 \tag{31}$$

Во втором сосуде уровень жидкости понизился на Δh_2, и появился грузик, который создал давление $m_2 g/S$. Значит

$$\Delta P_2 = -\rho g \Delta h_2 + \frac{m_2 g}{S} \tag{32}$$

Воспользуемся тем, что $\Delta P_1 = \Delta P_2$.

$$\rho g \Delta h_1 + \frac{k\Delta h_1}{S} = -\rho g \Delta h_2 + \frac{m_2 g}{S} \tag{33}$$

используем 31

$$\rho g \frac{\Delta h_2}{2} + \frac{k\Delta h_2}{2S} + \rho g \Delta h_2 = \frac{m_2 g}{S} \tag{34}$$

откуда можно найти смещение поршня в центральном сосуде

$$\Delta h_2 = \frac{2m_2 g}{3\rho g S + k} \tag{35}$$

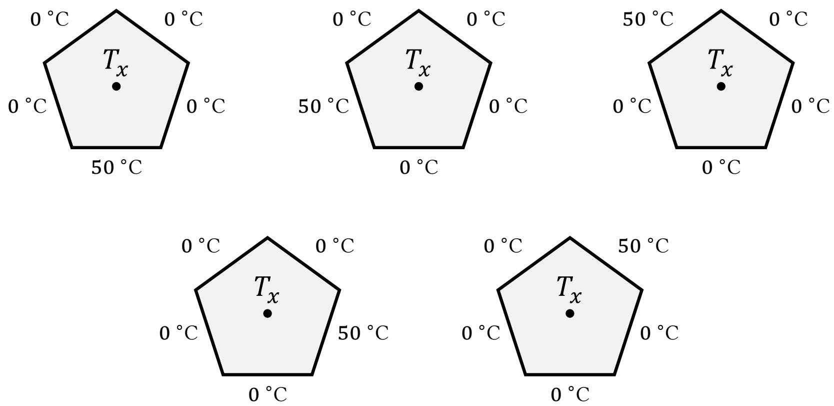
$$\Delta h_1 = \Delta h_3 = \frac{1}{2}\Delta h_2 = \frac{m_2 g}{3\rho g S + k} \tag{36}$$

Ответ: уровень воды в центральном сосуде изменится на $\Delta h_2 = \frac{2m_2 g}{3\rho g S+k}$, а в боковых на $\Delta h_1 = \Delta h_3 = \frac{1}{2}\Delta h_2 = \frac{m_2 g}{3\rho g S+k}$

Задача 7. Суперпозиция

Заметим, что если все стороны пластинки нагреть на ΔT, после установление теплового равновесия, температура в любой точке пластинки тоже увеличится на ΔT. Это значит что температура внутри зависит только от разности температур на сторонах пластинки, но не от их абсолютного значения. Также заметим, что вклад от разных сторон в температуру внутренних точек независим — потоки тепла не взаимодействуют между собой, поэтому можно их «складывать». То есть, если изменить температуру сторон на $\Delta T_1, \Delta T_2, \dots, \Delta T_5$, изменение температуре во внутренней точке будет равно температуре, которая была бы в этой точке, если бы стороны поддерживались при температурах $\Delta T_1, \dots, \Delta T_5$.

Рассмотрим пять ситуаций, в которых одна сторона поддерживается при температуре $50\ ^\circ\mathrm{C}$, а остальные при температуре $0\ ^\circ\mathrm{C}$.



Эти системы симметричны с точностью до поворота, а значит температуры T_x в центре пластинок одинаковы. Наложим картинки друг на друга. Получится пластина, все стороны которой имеют температуру $50\ ^\circ\mathrm{C}$, а значит и во внутренних точках будет температура $50\ ^\circ\mathrm{C}$. С другой стороны температура в центре $5T_x$, а значит $T_x = 10\ ^\circ\mathrm{C}$.

Для того чтобы получить систему из условия остаётся только увеличить температуру всех сторон на $20\ ^\circ\mathrm{C}$. В итоге температура в центре будет равна $30\ ^\circ\mathrm{C}$.

<u>**Ответ:**</u> температура в центре пластины $30\ ^\circ\mathrm{C}$.