Возможные решения задач
8 класс
1-й вариант

Задача 1. Шары или сферы

Сначала, определим во сколько раз отличаются диаметры шаров. Шар однозначно определяется своим диаметром, а значит любые его геометрические параметры тоже выражаются исключительно через диаметр. Исходя из соображений размерности,

$$V_{\text{шара}} = \alpha \cdot d^3, \tag{1}$$

где α — некоторый безразмерный коэффициент. Значит, если объёмы шаров относятся как $1 : 64$, их диаметры должны относится как $1 : 4$.

Поймём, как зависит объём сферы с тонкими стенками от их толщины h и диаметра сферы d. Этот вопрос аналогичен вопросу про количество краски, которая требуется для того, чтобы покрыть тонким слоем поверхность. Интуитивно понятно, что количество краски пропорционально площади этой поверхности.

Чтобы получить эту зависимость строго, посчитаем объём как разность объёмов двух шаров, диаметры которых отличаются на $2h$

$$\begin{aligned} V_{\text{сферы}} &= \alpha \cdot (d+2h)^3 - \alpha \cdot d^3 = \alpha\left(d^3 + 6d^2h + 6dh^2 + 8h^3 - d^3\right) = \\ &= \alpha \cdot 6d^2h \cdot \left(1 + \frac{h}{d} + \frac{4}{3}\frac{h^2}{d^2}\right). \end{aligned} \tag{2}$$

Заметим, что стенки тонкие, то есть отношение h/d мало по сравнению с единицей. Поэтому можно пренебречь всеми слагаемыми в скобках кроме первого. Получили, что объём сферы с тонкими стенками толщины h равен

$$V_{\text{сферы}} = 6\alpha \cdot hd^2. \tag{3}$$

Это значит, что если для изготовления маленькой сферы потребовался 1 кг, то для большой потребуется 16 кг (их диаметры отличаются в 4 раза). Поэтому останется $(64 - 16)$ кг $= 48$ кг материала.

Ответ: Останется 48 кг материала.

Задача 2. Из пустого в порожнее

Проследим мысленно за жидкостью из первого ведра отдельно. В начале её температура была 4 °C, а после переливания и нагрева стала равна 20 °C. Если теплоёмкость жидкости c, а плотность ρ, на это потребовалась теплота

$$Q_1 = c\rho \cdot 1\ \text{л} \cdot (20\ ^\circ\text{C} - 4\ ^\circ\text{C}) = c\rho \cdot 16\ ^\circ\text{C} \cdot \text{л}. \tag{4}$$

Для нагрева жидкости из второго ведра необходима теплота

$$Q_2 = c\rho \cdot 2\ \text{л} \cdot (20\ ^\circ\text{C} - 8\ ^\circ\text{C}) = c\rho \cdot 16\ ^\circ\text{C} \cdot \text{л}, \tag{5}$$

а для жидкости из третьего

$$Q_3 = c\rho \cdot 4\ \text{л} \cdot (20\ ^\circ\text{C} - 16\ ^\circ\text{C}) = c\rho \cdot 16\ ^\circ\text{C} \cdot \text{л}. \tag{6}$$

Видно, что $Q_1 = Q_2 = Q_3$, поэтому всего потребуется теплоты

$$Q_\Sigma = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 3Q_3. \tag{7}$$

Из условия известно, что $Q_3 = 70$ кДж.

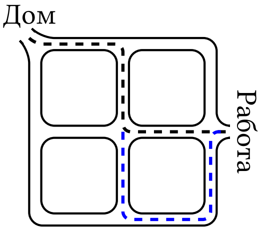
Ответ: На нагрев жидкости в третьем ведре потребуется $Q_\Sigma = 3Q_3 = 210$ кДж.

Задача 3. Необычный день

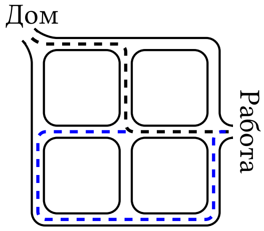
Пускай длина одного участка дороги ℓ, а обычная скорость мистера Смита v. Тогда до неудачного дня, на дорогу от дома до работы уходило время

$$T_{\text{обычно}} = \frac{3\ell}{v}. \tag{8}$$

Посмотрим, куда мистер Смит мог повернуть утром. Заметим, что у него есть только два варианта ошибиться. В одном из них он проехал с увеличенной скоростью nv расстояние 3ℓ, а в другом 5ℓ. То есть время, поездки на работу могло быть

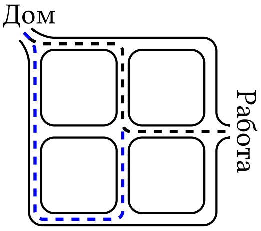


$$T^{\mathrm{I}}_{\text{утро}} = \frac{2\ell}{v} + \frac{3\ell}{nv} \tag{9}$$

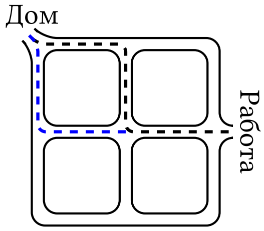


$$T^{\mathrm{II}}_{\text{утро}} = \frac{2\ell}{v} + \frac{5\ell}{nv} \tag{10}$$

Вечером у мистера Смита тоже было два варианта



$$T^{\mathrm{I}}_{\text{вечер}} = \frac{5\ell}{v} \tag{11}$$



$$T^{\mathrm{II}}_{\text{вечер}} = \frac{3\ell}{v} \tag{12}$$

Из условия известно, что на дорогу ушло больше времени, чем обычно, значит подходит только первый вариант

$$T_{\text{вечер}} = \frac{5\ell}{v}. \tag{13}$$

Пока что складывается впечатление, что у задачи есть два решения. Найдём их, приравняв времена, которые ушли на дорогу утром и вечером

$$\frac{2\ell}{v} + \frac{3\ell}{nv} = \frac{5\ell}{v} \quad \Rightarrow \quad \frac{3\ell}{nv} = \frac{3\ell}{v} \quad \Rightarrow \quad n = 1. \tag{14}$$

То есть скорость не увеличивалась. Этот вариант не подходит по условию задачи. Разберёмся с оставшимся

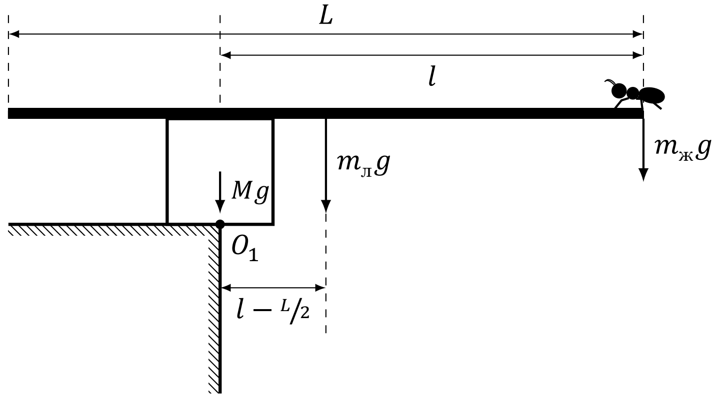
$$\frac{2\ell}{v} + \frac{5\ell}{nv} = \frac{5\ell}{v} \quad \Rightarrow \quad \frac{5\ell}{nv} = \frac{3\ell}{v} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{5}{3}. \tag{15}$$

<u>**Ответ:**</u> Мистер Смит увеличил скорость в $5/3$ раз.

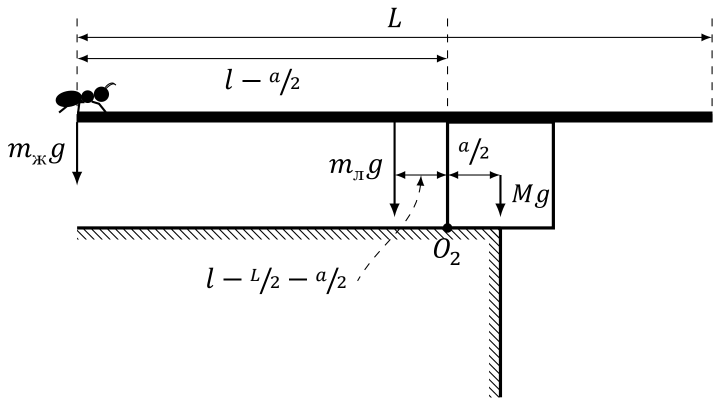
Задача 4. Жук на склоне

Первым делом заметим, что можно рассматривать только ситуации, когда жук находится на краю линейки. Пусть жук не на краю линейки и система находится в равновесии. Тогда можно переклеить линейку и сместить жука в разные стороны таким образом, чтобы их центр масс остался на месте. При этом жук удалится от края стола, а система не выйдет из равновесия (центр масс не изменил своего положения).

Теперь посмотрим, что происходит, если жук находится на правом конце линейки. Так как по условию $l > L/2$, и сила тяжести линейки, и сила тяжести жука «закручивают» систему по часовой стрелке. Причём эти силы ничем не уравновешены, и система начнёт вращаться относительно точки O_1.



Разберёмся со случаем, когда жук сидит на левом краю линейки. Тогда при нарушении равновесия вращение начнётся относительно угла кубика (O_2)



Запишем правило рычага относительно точки O_2 для случая, когда жук находится над столом

$$M \cdot \frac{a}{2} = m_ж \cdot \left(l - \frac{a}{2}\right) + m_л \cdot \left(l - \frac{L}{2} - \frac{a}{2}\right), \tag{16}$$

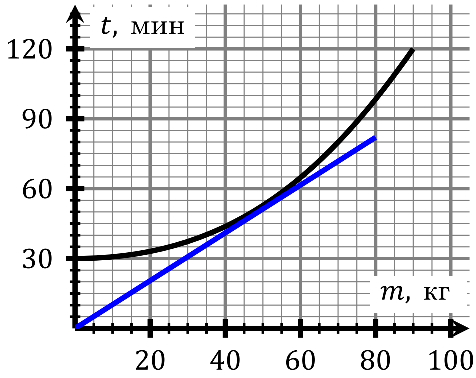
Отсюда можно выразить массу жука

$$m_ж = \frac{1}{2l - a}\left(M \cdot a - m_л \cdot (2l - L - a)\right) = \\ = \frac{1}{35\ \text{см}}\left(22\ \text{г} \cdot 5\ \text{см} - 15\ \text{г} \cdot (40\ \text{см} - 30\ \text{см} - 5\ \text{см})\right) = \frac{120 - 85}{35}\ \text{г} = 1\ \text{г} \tag{17}$$

Ответ: Масса жука 1 г

Задача 5. Ответственный мальчик

Нас интересует минимальное время, за которое мальчик может перевезти весь мусор. Время будет минимально, когда отношение $\frac{m}{t}$, то есть «скорость» вывоза мусора, должно быть максимальным. На графике это соответствует самой пологой прямой, которая выходит из нуля и имеет общую точку с графиком.



Из графика видно, что оптимальное отношение

$$\frac{t}{m} \approx \frac{82}{80} \frac{\text{мин}}{\text{кг}} \tag{18}$$

поэтому на то, чтобы перевезти весь мусор потребуется время

$$T = 2000 \text{ кг} \frac{\text{мин}}{\text{кг}} \approx 34 \text{ ч} \tag{19}$$

<u>Ответ:</u> На то, чтобы вывезти весь мусор потребуется 34 ч

Возможные решения задач

8 класс

2-й вариант

Задача 1. Шары или сферы

Сначала, определим во сколько раз отличаются диаметры шаров. Шар однозначно определяется своим диаметром, а значит любые его геометрические параметры тоже выражаются исключительно через диаметр. Исходя из соображений размерности,

$$V_{\text{шара}} = \alpha \cdot d^3, \tag{20}$$

где α — некоторый безразмерный коэффициент. Значит, если объёмы шаров относятся как $1 : 64$, их диаметры должны относится как $1 : 4$.

Поймём, как зависит объём сферы с тонкими стенками от их толщины h и диаметра сферы d. Этот вопрос аналогичен вопросу про количество краски, которая требуется для того, чтобы покрыть тонким слоем поверхность. Интуитивно понятно, что количество краски пропорционально площади этой поверхности.

Чтобы получить эту зависимость строго, посчитаем объём как разность объёмов двух шаров, диаметры которых отличаются на $2h$

$$\begin{aligned} V_{\text{сферы}} &= \alpha \cdot (d+2h)^3 - \alpha \cdot d^3 = \alpha\left(d^3 + 6d^2h + 6dh^2 + 8h^3 - d^3\right) = \\ &= \alpha \cdot 6d^2h \cdot \left(1 + \frac{h}{d} + \frac{4}{3}\frac{h^2}{d^2}\right). \end{aligned} \tag{21}$$

Заметим, что стенки тонкие, то есть отношение h/d мало по сравнению с единицей. Поэтому можно пренебречь всеми слагаемыми в скобках кроме первого. Получили, что объём сферы с тонкими стенками толщины h равен

$$V_{\text{сферы}} = 6\alpha \cdot hd^2. \tag{22}$$

Это значит, что если для изготовления маленькой сферы потребовался 1 кг, то для большой потребуется 16 кг (их диаметры отличаются в 4 раза). Поэтому из заказанного материала можно отлить $\frac{64}{16} = 4$ большие сферы.

<u>**Ответ:**</u> Из заказанного материала можно отлить 4 большие сферы.

Задача 2. Из пустого в порожнее

Проследим мысленно за жидкостью из первого ведра отдельно. В начале её температура была 4 °C, а после переливания и нагрева стала равна 20 °C. Если теплоёмкость жидкости c, а плотность ρ, на это потребовалась теплота

$$Q_1 = c\rho \cdot 1 \text{ л} \cdot (20\text{ °C} - 4\text{ °C}) = c\rho \cdot 16\text{ °C} \cdot \text{л}. \tag{23}$$

Для нагрева жидкости из второго ведра необходима теплота

$$Q_2 = c\rho \cdot 2 \text{ л} \cdot (20\text{ °C} - 8\text{ °C}) = c\rho \cdot 16\text{ °C} \cdot \text{л}, \tag{24}$$

а для жидкости из третьего

$$Q_3 = c\rho \cdot 4 \text{ л} \cdot (20\text{ °C} - 16\text{ °C}) = c\rho \cdot 16\text{ °C} \cdot \text{л}. \tag{25}$$

Видно, что $Q_1 = Q_2 = Q_3$, поэтому всего потребуется теплоты

$$Q_\Sigma = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 3Q_1. \tag{26}$$

Из условия известно, что $Q_1 = 90$ кДж.

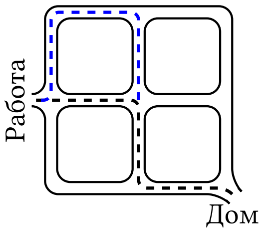
Ответ: На нагрев жидкости в третьем ведре потребуется $Q_\Sigma = 3Q_1 = 270$ кДж.

Задача 3. Необычный день

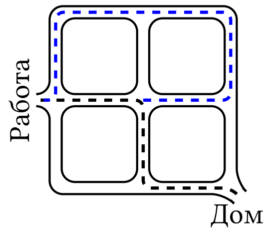
Пускай длина одного участка дороги ℓ, а обычная скорость мистера Смита v. Тогда до неудачного дня, на дорогу от дома до работы уходило время

$$T_{\text{обычно}} = \frac{3\ell}{v}. \tag{27}$$

Посмотрим, куда мистер Смит мог повернуть утром. Заметим, что у него есть только два варианта ошибиться. В одном из них он проехал с увеличенной скоростью nv расстояние 3ℓ, а в другом 5ℓ. То есть время, поездки на работу могло быть

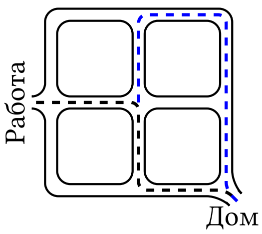


$$T^{\mathrm{I}}_{\text{утро}} = \frac{2\ell}{v} + \frac{3\ell}{nv} \tag{28}$$

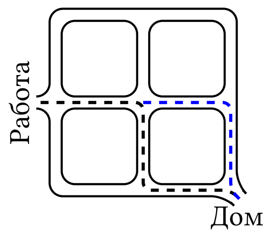


$$T^{\mathrm{II}}_{\text{утро}} = \frac{2\ell}{v} + \frac{5\ell}{nv} \tag{29}$$

Вечером у мистера Смита тоже было два варианта



$$T^{\mathrm{I}}_{\text{вечер}} = \frac{5\ell}{v} \tag{30}$$



$$T^{\mathrm{II}}_{\text{вечер}} = \frac{3\ell}{v} \tag{31}$$

Из условия известно, что на дорогу ушло больше времени, чем обычно, значит подходит только первый вариант

$$T_{\text{вечер}} = \frac{5\ell}{v}. \tag{32}$$

Пока что складывается впечатление, что у задачи есть два решения. Найдём их, приравняв времена, которые ушли на дорогу утром и вечером

$$\frac{2\ell}{v} + \frac{3\ell}{nv} = \frac{5\ell}{v} \quad \Rightarrow \quad \frac{3\ell}{nv} = \frac{3\ell}{v} \quad \Rightarrow \quad n = 1. \tag{33}$$

То есть скорость не увеличивалась. Этот вариант не подходит по условию задачи. Разберёмся с оставшимся

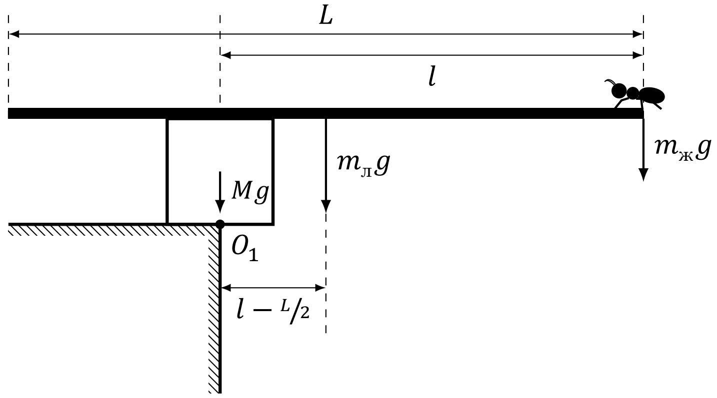
$$\frac{2\ell}{v} + \frac{5\ell}{nv} = \frac{5\ell}{v} \quad \Rightarrow \quad \frac{5\ell}{nv} = \frac{3\ell}{v} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{5}{3}. \tag{34}$$

Ответ: Мистер Смит увеличил скорость в $^5/_3$ раз.

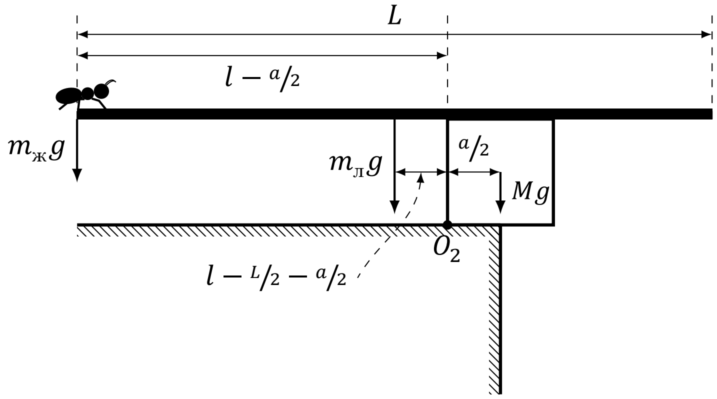
Задача 4. Жук на склоне

Первым делом заметим, что можно рассматривать только ситуации, когда жук находится на краю линейки. Пусть жук не на краю линейки и система находится в равновесии. Тогда можно переклеить линейку и сместить жука в разные стороны таким образом, чтобы их центр масс остался на месте. При этом жук удалится от края стола, а система не выйдет из равновесия (центр масс не изменил своего положения).

Теперь посмотрим, что происходит, если жук находится на правом конце линейки. Так как по условию $l > L/2$, и сила тяжести линейки, и сила тяжести жука «закручивают» систему по часовой стрелке. Причём эти силы ничем не уравновешены, и система начнёт вращаться относительно точки O_1.



Разберёмся со случаем, когда жук сидит на левом краю линейки. Тогда при нарушении равновесия вращение начнётся относительно угла кубика (O_2)



Запишем правило рычага относительно точки O_2 для случая, когда жук находится над столом

$$M \cdot \frac{a}{2} = m_ж \cdot \left(l - \frac{a}{2}\right) + m_л \cdot \left(l - \frac{L}{2} - \frac{a}{2}\right), \tag{35}$$

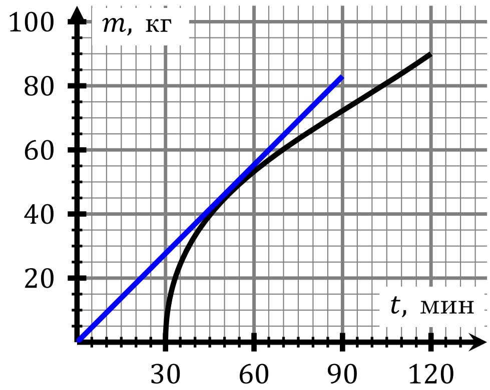
Отсюда можно выразить массу кубика

$$M = \frac{2}{a}\left(m_ж \cdot \left(l - \frac{a}{2}\right) + m_л \cdot \left(l - \frac{L}{2} - \frac{a}{2}\right)\right) = \\ = \frac{2}{5\text{ см}}\left(2\text{ г} \cdot (20\text{ см} - 2{,}5\text{ см}) + 15\text{ г} \cdot (20\text{ см} - 15\text{ см} - 2{,}5\text{ см})\right)\text{ г} = \frac{2 \cdot 72{,}5}{5} = 29\text{ г} \tag{36}$$

__**Ответ:**__ Масса кубика 29 г

Задача 5. Ответственный мальчик

Нас интересует минимальное время, за которое мальчик может перевезти весь мусор. Время будет минимально, когда отношение $\frac{m}{t}$, то есть «скорость» вывоза мусора, должно быть максимальным. На графике это соответствует самой крутой прямой, которая выходит из нуля и имеет общую точку с графиком.



Из графика видно, что оптимальное отношение

$$\frac{t}{m} \approx \frac{90}{83} \frac{\text{мин}}{\text{кг}} \tag{37}$$

поэтому на то, чтобы перевезти весь мусор потребуется время

$$T = 2000 \text{ кг} \frac{\text{мин}}{\text{кг}} \approx 36 \text{ ч} \tag{38}$$

<u>**Ответ:**</u> На то, чтобы вывезти весь мусор потребуется 36 ч