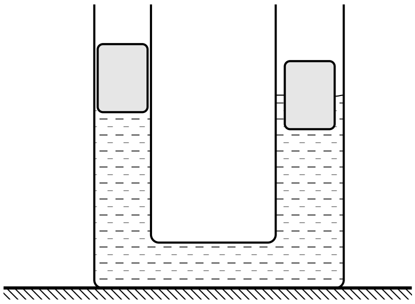
Возможные решения задач
7 класс

Задача 1. Пробки



Введем обозначения: m — масса пробки, $\rho_{пр}$ — плотность пробки, $V_{пр}$ — объем пробки, h — высота пробки, $\rho_в$ — плотность воды, и $V_п$ — объем погруженной части пробки.

Начнем с рассмотрения правой пробки. Так как вода просачивается между стенками и пробкой, условие равновесия пробки сводится к равенству силы Архимеда и силы тяжести пробки

$$mg = \rho_в V_п g, \quad \Rightarrow \quad \rho_{пр} V_{пр} = \rho_в V_п. \tag{1}$$

Если подставить известные плотности воды и пробки можно увидеть, что пробка погружена в воду ровно на половину своего объема, значит верхний край правой пробки на 2,5 см выше уровня воды в правом сосуде.

Попробуем получить условие равновесия левой пробки. Ее сила тяжести должна компенсироваться силой давления на нижнюю сторону пробки со стороны воды. Обозначим эту силу $F_д$. Тогда

$$mg = F_д = \rho_в g \Delta h S, \tag{2}$$

где Δh — разность уровней воды в правом и левом сосудах, S — площадь сечения левого сосуда. Тогда

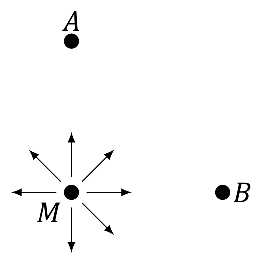
$$\rho_{пр} h S g = \rho_в g \Delta h S, \tag{3}$$

откуда можно найти, что Δh равно 2,5 см. Тогда оказывается, что верхний край правой пробки выше, чем уровень воды в левом сосуде, на 5 см. На таком же уровне находится верхний край левой пробки. Поэтому искомая разность высот равна 0.

Этот результат не должен удивлять, потому что сила Архимеда является разностью сил давления на погруженное тело снизу и сверху. В случае правой пробки, она равна силе давления на нижнюю сторону пробки. Следовательно давления на уровне нижней стороны левой и правой пробок должны быть равны, а значит нижнии стороны пробок должны быть на одной высоте.

Ответ: Разность высот равна 0.

Задача 2. Провиант



В момент, когда муравьи впервые добежали до кусочков торта, они все располагаются на окружности с радиусом, раным длине MB, которую обозначим за L. Из точек A и B муравьи бегут во все стороны. Первыми обменяются информацие о тортах два муравья, бегущих навстречу друг другу. По условию, это произойдет через 10 с. С другой стороны это время равно $\frac{AB}{4v} = \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{L}{v}$. Тогда

$$\frac{L}{v} = \frac{4}{\sqrt{2}} \cdot 10 \text{ с} \approx 28 \text{ с}. \tag{4}$$

Последним о существовании торта в точке B узнает муравей, бегущий изначально в противоположную сторону. Его должен догнать муравей, прибежавший сначала в точку B со скоростью v, а потом бегущий в обратном направлении со скоростью $2v$. На это уйдет время t, определяемое

$$L + vt = -L + 2vt. \tag{5}$$

Оно равно

$$t = \frac{2L}{v} \approx 56 \text{ с}. \tag{6}$$

Тогда, начиная с указанного в условии момента, пройдет $56 \text{ с} - 10 \text{ с} = 46 \text{ с}$

Ответ: Через 46 с

Задача 3. Маршрут

Обозначим за ℓ длину участка дороги между перекрестками. Тогда время пути, вычисленное навигатором равно

$$t_1 = \frac{18\ell}{18\ \text{км/ч}}. \tag{7}$$

Время, которое на самом деле ушло на дорогу

$$t_2 = \frac{(18-n)\ell}{20\ \text{км/ч}} + \frac{n\ell}{10\ \text{км/ч}}, \tag{8}$$

где n — число левых поворотов. Найдем отношение этих времен

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{\frac{18\ell}{18\ \text{км/ч}}}{\frac{(18-n)\ell}{20\ \text{км/ч}} + \frac{n\ell}{10\ \text{км/ч}}}. \tag{9}$$

Это уравнение можно переписать

$$\frac{(18-n)\ell}{20\ \text{км/ч}} + \frac{n\ell}{10\ \text{км/ч}} = \frac{t_2}{t_1}\frac{18\ell}{18\ \text{км/ч}}, \tag{10}$$

и отсюда выразить n

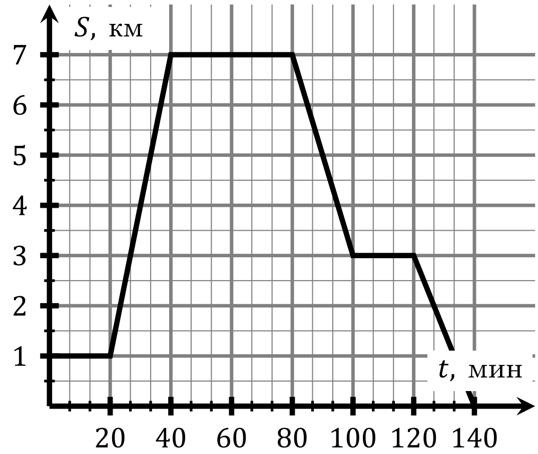
$$n = 20\ \text{км/ч}\left(\frac{t_2}{t_1}\frac{18}{18\ \text{км/ч}} - \frac{18}{20\ \text{км/ч}}\right). \tag{11}$$

Подставляя времена, получаем

$$n = 20 \cdot \frac{87}{60} - 18 = 11. \tag{12}$$

Ответ: Вадим совершил 11 левых поворотов.

Задача 4. Триатлон



Проанализируем график зависимости расстояния между Алисой и Бобом от времени. Когда оба спортсмена бегут по одному участку, расстояние между ними не изменяется. На графике этому соответствуют 3 горизонтальных отрезка. На промежутке от 20 до 40 мин Боб всё ещё бежит по первому участку, а Алиса уже по второму, при чём с большей скоростью. За 20 мин расстояние между ними увеличилось на 6 км. Из этого можем найти разность скоростей на втором и первом участках:

$$v_2 - v_1 = \frac{6\text{ км}}{20\text{ мин}} = \frac{18\text{ км}}{60\text{ мин}} = 18\text{ км/ч}. \tag{13}$$

На промежутке от 80 до 100 мин Боб бежит по второму участку, а Алиса уже по третьему, при чём с меньшей скоростью. За 20 мин расстояние между ними уменьшилось на 4 км. Из этого можем найти разность скоростей на втором и третьем участках:

$$v_2 - v_3 = \frac{4\text{ км}}{20\text{ мин}} = 12\text{ км/ч}. \tag{14}$$

На промежутке от 120 до 140 мин Боб бежит по третьему участку, а Алиса уже ждёт на финише. Тогда скорость их сближения это просто скорость на третьем участке. За 20 мин расстояние между ними уменьшилось на 3 км, поэтому

$$v_3 = \frac{3\text{ км}}{20\text{ мин}} = 9\text{ км/ч}. \tag{15}$$

Теперь, используя (13) и (14), найдём остальные скорости:

$$v_2 = v_3 + (v_2 - v_3) = 9\text{ км/ч} + 12\text{ км/ч} = 21\text{ км/ч}, \tag{16}$$

$$v_1 = v_2 - (v_2 - v_1) = 21\text{ км/ч} - 18\text{ км/ч} = 3\text{ км/ч}. \tag{17}$$

Длины участков найдём исходя из того, за сколько времени их проходил Боб. На первом участке он был первые 40 мин и двигался со скоростью v_1, значит длина этого участка равна

$$\ell_1 = v_1 \cdot 40\text{ мин} = 3\text{ км/ч} \cdot \tfrac{2}{3}\text{ ч} = 2\text{ км}. \tag{18}$$

На втором участке Боб был в промежутке от 40 до 100 мин, значит

$$\ell_2 = v_2 \cdot (100\text{ мин} - 40\text{ мин}) = 21\text{ км}. \tag{19}$$

Оставшиеся 40 мин он проходил третий участок, поэтому

$$\ell_3 = v_3 \cdot 40\text{ мин} = 6\text{ км}. \tag{20}$$

Ответ: Длины участков: 2 км, 21 км, 6 км. Скорости на участках: 3 км/ч, 21 км/ч, 9 км/ч.

Задача 5. Закрытая вселенная Фридмана

Пусть T_1 — обычное время движения муравья, T_2 — время движения, которое получилось при надувании.

Длина траектории на сфере пропрциональна радиусу сферы. Если R_0 — обычный радиус сферы, то длина траектории муравья равна αR_0. Тогда обычное время движения муравья $T_1 = \frac{\alpha R_0}{v}$, где v — постоянная скорость движения муравья.

Рассмотрим, какую часть пути муравей проходит за время Δt, если его скорость и радиус сферы постоянны. Эта часть равна

$$\Delta n = \frac{v \Delta t}{\alpha R_0}. \tag{21}$$

Если вместо Δt подставить T_1, то мы получим весь путь, то есть $\frac{vT_1}{\alpha R_0} = 1$. Если теперь радиус сферы меняется, то нужно суммировать доли пройденного пути на всех промежутках, на которых радиус постоянен. В таком случае

$$1 = \sum \Delta n = \sum_{n=1}^{100} \frac{v}{\alpha R(n)} \frac{T_2}{100}. \tag{22}$$

По условию, $R(n) = \frac{200}{200-n}$, тогда

$$1 = \frac{T_2}{T_1} \sum_{n=1}^{100} \left(\frac{1}{100} - \frac{n}{200 \cdot 100} \right). \tag{23}$$

Можно вычислить

$$\sum_{n=1}^{N} 1 = N, \tag{24}$$

$$\sum_{n=1}^{N} n = \frac{1}{2} N(N+1). \tag{25}$$

Тогда

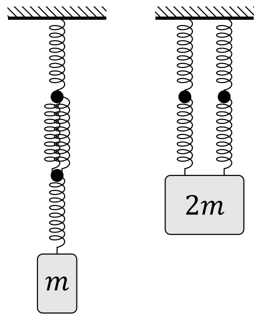
$$\sum_{n=1}^{100} \left(\frac{1}{100} - \frac{n}{200 \cdot 100} \right) \approx \frac{3}{4}, \tag{26}$$

а отсюда

$$T_2 = \frac{4}{3} T_1 = 1 \text{ минута } 20 \text{ секунд}. \tag{27}$$

Ответ: Муравей пройдет свой путь за 1 минуту 20 секунд.

Задача 6. Неудобный безмен



Начнем с того, что выведем удобное правило обращения с пружинами. Рассмотрим две пружины с жесткостями k_1 и k_2. Если они расположены параллельно друг другу, их можно заменить на одну пружину, жесткостью $k = k_1 + k_2$, потому что

$$k = \frac{F}{\Delta\ell} = \frac{F_1 + F_2}{\Delta\ell} = \frac{F_1}{\Delta\ell} + \frac{F_2}{\Delta\ell} = k_1 + k_2 \tag{28}$$

Если они расположены последовательно (одна прикреплена к концу другой), то их можно заменить одной пружиной с жесткостью k, такой что $\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$, потому что

$$\frac{1}{k} = \frac{\Delta\ell}{F} = \frac{\Delta\ell_1 + \Delta\ell_2}{F} = \frac{\Delta\ell_1}{F} + \frac{\Delta\ell_2}{F} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}. \tag{29}$$

Воспользуемся этим и рассчитаем жесткости конструкций из пружин безмена. Начнем с правой конструкции. Пусть безмен состоит из пружин с жесткостями k_1 и k_2. Тогда жесткость безмена

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k'}, \quad \Rightarrow \quad k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}, \tag{30}$$

а жесткость правой конструкции $2k$. Раз к ней подвешен вдвое больший груз при том же растяжении, жесткость левой конструкции должна быть в два раза меньше, то есть k.

С другой стороны, жесткость левой конструкции может принимать два различных значения, потому что один из безменов мог быть перевернут. Вычислим две возможных жесткости левой конструкции.

Если оба безмена повернуты одинаково, то

$$\frac{1}{k'} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_1 + k_2} + \frac{1}{k_2}, \quad \Rightarrow \quad k' = \frac{k_1 k_2 (k_1 + k_2)}{k_1 k_2 + k_1(k_1 + k_2) + k_2(k_1 + k_2)} \tag{31}$$

Введем обозначение $\frac{k_1}{k_2} = \mu$ и рассмотрим равенство $k = k'$

$$\frac{\mu}{\mu + 1} = \frac{\mu^2 + \mu}{\mu^2 + 3\mu + 1}. \tag{32}$$

Нетрудно убедиться, что оно не имеет решений кроме $\mu = 0$, чего быть не может.

Если два безмена повернуты поразному, то

$$\frac{1}{k'} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2 + k_2} + \frac{1}{k_1}, \quad \Rightarrow \quad k' = \frac{2k_1^2 k_2}{k_1^2 + 4k_1 k_2} \tag{33}$$

Рассмотрим в этом случае равенство $k = k'$, используя введенное обозначение

$$\frac{\mu}{\mu + 1} = \frac{2\mu^2}{\mu^2 + 4\mu}. \tag{34}$$

Оно сводится к линейном уравнению

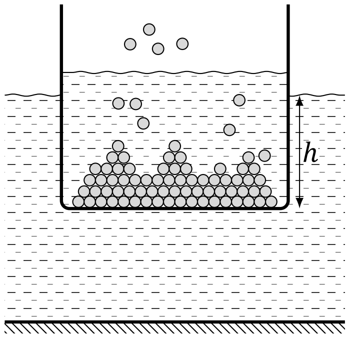
$$\mu + 4 = 2\mu + 2. \tag{35}$$

Которое имеет решением $\mu = 2$.

Ответ: Жесткости пружин отличаются в 2 раза.

Задача 7. Через край

Пусть $M_\text{к}$ — масса контейнера, S — площадь внешнего сечения контейнера, $M_\text{в}$ — масса налитой в него воды, ρ — плотность воды, $\rho_\text{м}$ — плотность металла, из которого изготовлены шарики.



Контейнер находится в равновесии, если суммарная сила тяжести скомпенсирована силой Архимеда. Значит

$$\rho Shg = M_\text{к}g + M_\text{в}g + mg, \tag{36}$$

где m — масса насыпанных шариков. Значит, если масса воды внутри контейнера не изменилась, то

$$\Delta h = \frac{1}{\rho S}\Delta m. \tag{37}$$

Однако по графику видно, что этот закон не всегда выполняется. Значит в какой-то момент вода начинает выливаться из контейнера. Тогда

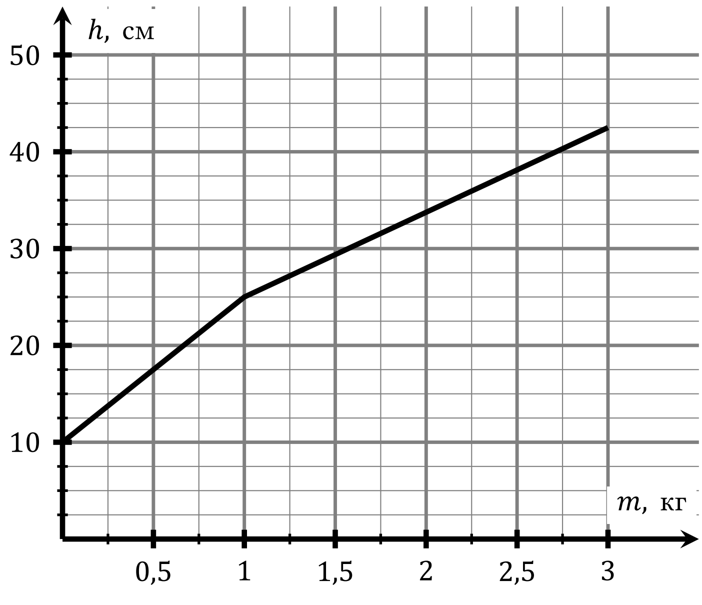
$$\Delta h = \frac{1}{\rho S}\left(\Delta m - \Delta M_\text{в}\right). \tag{38}$$

Кроме того, суммарный объем шариков и воды внутри контейнера с этого момента постоянен, значит

$$\frac{\Delta m}{\rho_\text{м}} = \frac{\Delta M_\text{в}}{\rho}. \tag{39}$$

Поэтому теперь должен выполняться новая зависимость шлубины погружения от насыпанной массы

$$\Delta h = \frac{1}{\rho S}\left(1 - \frac{\rho}{\rho_\text{м}}\right)\Delta m. \tag{40}$$



Отношение $\frac{\Delta h}{\Delta m}$ можно определить по угловому коэффициенту на графике. Пусть в первом случае это k_1, а во втором k_2. Тогда

$$\frac{k_2}{k_1} = \left(1 - \frac{\rho}{\rho_\text{м}}\right). \tag{41}$$

Исходя из графика $\frac{k_2}{k_1} = \frac{7}{12}$. Можно найти

$$\rho_\text{м} = \frac{12}{5}\rho = 2{,}4\ \text{г/см}^3. \tag{42}$$

<u>Ответ:</u> Плотность одного шарика равна 2,4 г/см^3