

# Возможные решения задач

7 класс

1-й вариант

## Задача 1. На заводе всё перепутали...

Начнём с того, что выразим указанную в ГОСТе стандартную плотность припоя  $\rho_{\text{ст.}}$  через  $\rho_o$  и  $\rho_c$ . Пусть масса всего изготовленного припоя равна  $m$ . Тогда масса олова в нем  $m_o = 0,4 m$ , а масса свинца  $m_c = 0,6 m$ .

Теперь найдём объёмы олова и свинца.

$$\begin{aligned} V_o &= \frac{m_o}{\rho_o} = \frac{0,4 m}{\rho_o}, \\ V_c &= \frac{m_c}{\rho_c} = \frac{0,6 m}{\rho_c}. \end{aligned} \quad (1)$$

Зная общую массу  $m$  и общий объём  $V = V_o + V_c$ , найдём плотность

$$\rho_{\text{ст.}} = \frac{m}{V} = \frac{m}{\frac{0,4 m}{\rho_o} + \frac{0,6 m}{\rho_c}} = \frac{\rho_o \rho_c}{0,4 \rho_c + 0,6 \rho_o} \quad (2)$$

Можно вычислить величину  $\rho_{\text{ст.}}$  по этой формуле, однако для нахождения ответа это не обязательно.

Выразим теперь получившуюся плотность припоя  $\rho_{\text{пол.}}$ . Пусть весь объём изготовленного припоя в этом случае равен  $V$ . Тогда объём олова  $V_o = 0,4 V$ , а объём свинца  $V_c = 0,6 V$ . Найдём массы олова и свинца в этом случае

$$\begin{aligned} m_o &= V_o \rho_o = 0,4 V \rho_o, \\ m_c &= V_c \rho_c = 0,6 V \rho_c. \end{aligned} \quad (3)$$

Зная общий объём  $V$  и общую массу  $m = m_o + m_c$  найдём плотность

$$\rho_{\text{пол.}} = \frac{m}{V} = \frac{0,4 V \rho_o + 0,6 V \rho_c}{V} = 0,4 \rho_o + 0,6 \rho_c. \quad (4)$$

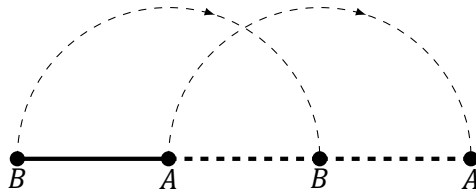
Остается найти отношение

$$\frac{\rho_{\text{пол.}}}{\rho_{\text{ст.}}} = \frac{(0,4 \rho_c + 0,6 \rho_o) (0,4 \rho_o + 0,6 \rho_c)}{\rho_o \rho_c} \approx 1,05. \quad (5)$$

**Ответ:** Плотность припоя больше в 1,05 раз от стандартной.

## Задача 2. Робототехническая

Пусть длина отрезка  $AB$  равна  $l$ . Изобразим на рисунке движение робота с начального момента до того, как робот-палка в первый раз вернется в положение с тем же порядком точек  $A$  и  $B$ .



К этому моменту робот сместился на расстояние  $2l$ , а точка  $B$  проделала путь, равный половине длины окружности с радиусом  $l$ .

После этого движение начинается из того же положения, что и в начале. Так как по условию в конце движения порядок точек  $A$  и  $B$  такой же, как в начале, то все движение можно разбить на несколько одинаковых циклов. Пусть таких участков было  $N$ . Тогда общее перемещение робота  $L = 2lN$ . А траектория точки  $B$  состоит из  $N$  полуокружностей.

Длина одной окружности с радиусом  $l$  равна

$$s \approx 62,8 \text{ см} \frac{l}{10 \text{ см}} = 6,28 l. \quad (6)$$

Тогда общий путь точки  $B$  равен длине её траектории

$$S = \frac{s}{2} N = 3,14 \cdot l N. \quad (7)$$

Произведение  $lN$  можно найти, зная полное перемещение  $L$

$$lN = \frac{L}{2}. \quad (8)$$

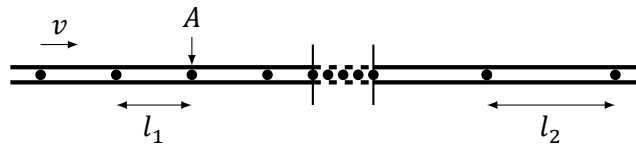
Тогда

$$S = 3,14 \cdot \frac{L}{2} = 31,4 \text{ м}. \quad (9)$$

**Ответ:** Длина траектории точки  $B$  равна 31,4 м

### Задача 3. Проверка на дорогах

До переезда поток машин  $N_1 = 50$  машин в минуту. Это означает, что за минуту мимо точки  $A$  проедет 50 машин. Обозначим расстояние между ними  $l_1$ , а скорость движения  $v$ .



Тогда  $t_1 = \frac{l_1}{v}$  это время, которое проходит между проездами двух соседних машин. Тогда

$$N_1 = \frac{1 \text{ минута}}{t_1} = 1 \text{ минута} \cdot \frac{v}{l_1}. \quad (10)$$

Значит произведение  $N_1 l_1$  пропорционально скорости движения на первом участке, а  $N_2 l_2$  — на втором. После переезда скорость движения машин не изменилась, значит

$$N_2 l_2 = N_1 l_1. \quad (11)$$

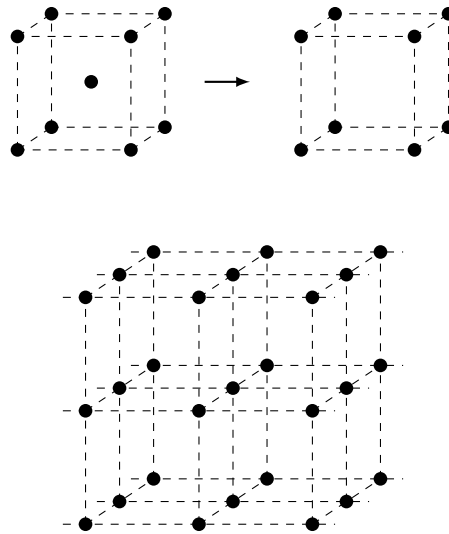
Отсюда следует, что

$$l_2 = \frac{N_1}{N_2} l_1 = 60 \text{ м}. \quad (12)$$

**Ответ:** Расстояние между машинами будет равно 60 м

## Задача 4. Кристаллография

Масса некоторого количества такого материала будет пропорциональна количеству частиц, а объем — количеству ячеек («кубиков»).



Попробуем вычислить плотность материала, в котором все частицы расположены в вершинах. Пусть общее число ячеек равно  $N$ . Тогда может показаться, что общее число частиц равно  $8N$ , так как у кубика 8 вершин. Однако это неверно. Действительно, ведь каждая частица относится не к одному, а к 8 кубикам, поэтому была учтена 8 раз. Значит всего частиц  $\frac{8N}{8} = N$ . Пусть масса одной частицы  $m$ , а объем одной ячейки  $V$ . Тогда плотность материала

$$\rho_1 = \frac{Nm}{NV} = \frac{m}{V}. \quad (13)$$

В материале с дополнительными частицами в центрах кубиков число частиц равно  $\frac{8N}{8} + N = 2N$ , и плотность

$$\rho_2 = \frac{2Nm}{NV} = 2\frac{m}{V}. \quad (14)$$

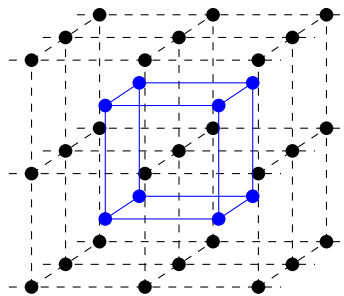
Тогда, если

$$\rho_2 = 9 \text{ г/см}^3, \quad \rho_1 = \frac{1}{2} \rho_2 = 4,5 \text{ г/см}^3. \quad (15)$$

**Ответ:** Плотность получившегося материала равна  $4,5 \text{ г/см}^3$

*При решении мы неверно учли частицы, расположенные на границе материала. Однако доля таких частиц очень мала, поэтому их вкладом можно пренебречь.*

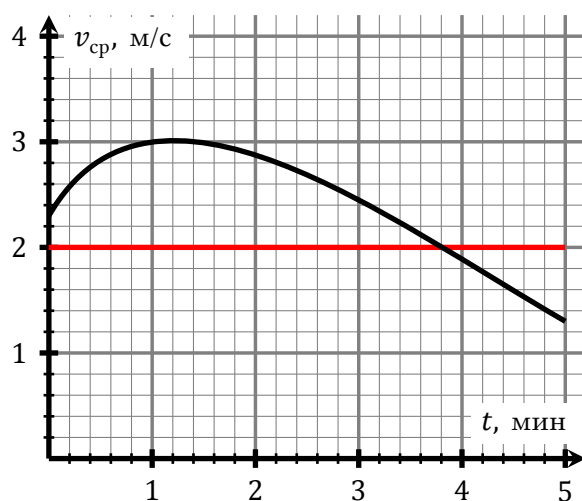
Кроме того можно предложить альтернативное решение. В материале с дополнительными частицами можно увидеть, что дополнительные частицы образуют такую же решетку, сдвинутую относительно основной.



Тогда можно сказать, что в одном и том же объеме количество частиц в разных материалах отличается в два раза. Зная это, можно получить финальный ответ.

## Задача 5. Прогулки по воде

Вспомним определение средней скорости. Средняя скорость  $v_{\text{ср}}$  за какой-то промежуток времени  $t$  равна расстоянию  $s$  пройденному за это время, деленному на  $t$ . Тогда в данной задаче, если мальчики встретились, то пройденные ими расстояния равны, а значит равны и средние скорости в момент встречи. Пользуясь этим утверждением, можно найти момент встречи по графику.



Так как Павел бежит с постоянной скоростью, его средняя скорость равна постоянной

$$v_{\text{ср.}} = v = 2 \text{ м/с.} \quad (16)$$

Следовательно, точка, в которой график пересекает горизонтальную линию на уровне 2 м/с соответствует моменту встречи мальчиков. Исходя из графика  $t \approx 3,8$  минуты. Тогда пройденное расстояние можно вычислить

$$s = vt = 2 \text{ м/с} \cdot 3,8 \cdot 60 \text{ с} = 456 \text{ м} \quad (17)$$

**Ответ:** Мальчики встретятся на расстоянии 456 м

# Возможные решения задач

7 класс

2-й вариант

## Задача 1. На заводе всё перепутали...

Начнём с того, что выразим указанную в ГОСТе стандартную плотность припоя  $\rho_{\text{ст.}}$  через  $\rho_o$  и  $\rho_c$ . Пусть масса всего изготовленного припоя равна  $m$ . Тогда масса олова в нем  $m_o = 0,6m$ , а масса свинца  $m_c = 0,4m$ .

Теперь найдём объёмы олова и свинца.

$$\begin{aligned} V_o &= \frac{m_o}{\rho_o} = \frac{0,6m}{\rho_o}, \\ V_c &= \frac{m_c}{\rho_c} = \frac{0,4m}{\rho_c}. \end{aligned} \quad (18)$$

Зная общую массу  $m$  и общий объём  $V = V_o + V_c$ , найдём плотность

$$\rho_{\text{ст.}} = \frac{m}{V} = \frac{m}{\frac{0,6m}{\rho_o} + \frac{0,4m}{\rho_c}} = \frac{\rho_o \rho_c}{0,6\rho_c + 0,4\rho_o} \quad (19)$$

Можно вычислить величину  $\rho_{\text{ст.}}$  по этой формуле, однако для нахождения ответа это не обязательно.

Выразим теперь получившуюся плотность припоя  $\rho_{\text{пол.}}$ . Пусть весь объём изготовленного припоя в этом случае равен  $V$ . Тогда объём олова  $V_o = 0,6V$ , а объём свинца  $V_c = 0,4V$ . Найдём массы олова и свинца в этом случае

$$\begin{aligned} m_o &= V_o \rho_o = 0,6V \rho_o, \\ m_c &= V_c \rho_c = 0,4V \rho_c. \end{aligned} \quad (20)$$

Зная общий объём  $V$  и общую массу  $m = m_o + m_c$  найдём плотность

$$\rho_{\text{пол.}} = \frac{m}{V} = \frac{0,6V \rho_o + 0,4V \rho_c}{V} = 0,6\rho_o + 0,4\rho_c. \quad (21)$$

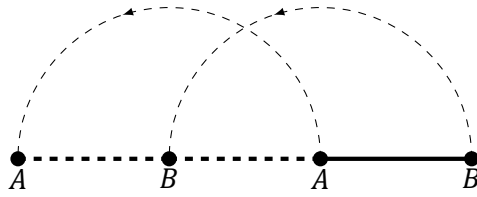
Остается найти отношение

$$\frac{\rho_{\text{пол.}}}{\rho_{\text{ст.}}} = \frac{(0,6\rho_c + 0,4\rho_o)(0,6\rho_o + 0,4\rho_c)}{\rho_o \rho_c} \approx 1,05. \quad (22)$$

**Ответ:** Плотность припоя больше в 1,05 раз от стандартной.

## Задача 2. Робототехническая

Пусть длина отрезка  $AB$  равна  $l$ . Изобразим на рисунке движение робота с начального момента до того, как робот-палка в первый раз вернется в положение с тем же порядком точек  $A$  и  $B$ .



К этому моменту робот сместился на расстояние  $2l$ , а точка  $B$  проделала путь, равный половине длины окружности с радиусом  $l$ .

После этого движение начинается из того же положения, что и в начале. Так как по условию в конце движения порядок точек  $A$  и  $B$  такой же, как в начале, то все движение можно разбить на несколько одинаковых циклов. Пусть таких участков было  $N$ . Тогда общее перемещение робота  $L = 2lN$ . А траектория точки  $B$  состоит из  $N$  полуокружностей.

Длина одной окружности с радиусом  $l$  равна

$$s \approx 62,8 \text{ см} \frac{l}{10 \text{ см}} = 6,28 l. \quad (23)$$

Тогда общий путь точки  $B$  равен длине её траектории

$$S = \frac{s}{2} N = 3,14 \cdot lN. \quad (24)$$

Произведение  $lN$  можно найти, зная полное перемещение  $L$

$$lN = \frac{L}{2}. \quad (25)$$

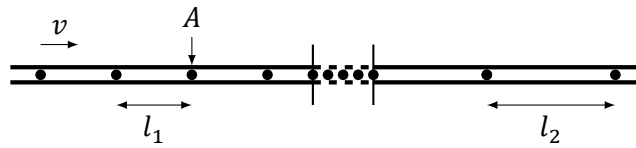
Тогда

$$S = 3,14 \cdot \frac{L}{2} = 47,1 \text{ м}. \quad (26)$$

**Ответ:** Длина траектории точки  $B$  равна 47,1 м

### Задача 3. Проверка на дорогах

До переезда поток машин  $N_1 = 50$  машин в минуту. Это означает, что за минуту мимо точки  $A$  проедет 50 машин. Обозначим расстояние между ними  $l_1$ , а скорость движения  $v$ .



Тогда  $t_1 = \frac{l_1}{v}$  это время, которое проходит между проездами двух соседних машин. Тогда

$$N_1 = \frac{1 \text{ минута}}{t_1} = 1 \text{ минута} \cdot \frac{v}{l_1}. \quad (27)$$

Значит произведение  $N_1 l_1$  пропорционально скорости движения на первом участке, а  $N_2 l_2$  — на втором. После переезда скорость движения машин не изменилась, значит

$$N_2 l_2 = N_1 l_1. \quad (28)$$

Отсюда следует, что

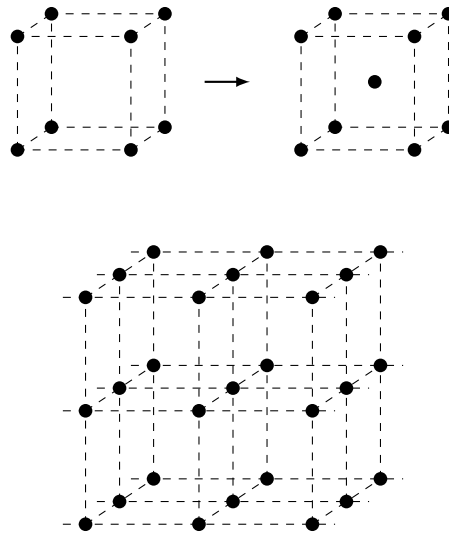
$$l_2 = \frac{N_1}{N_2} l_1 = 80 \text{ м}. \quad (29)$$

**Ответ:** Расстояние между машинами будет равно 80 м



## Задача 4. Кристаллография

Масса некоторого количества такого материала будет пропорциональна количеству частиц, а объем — количеству ячеек («кубиков»).



Попробуем вычислить плотность материала, в котором все частицы расположены в вершинах. Пусть общее число ячеек равно  $N$ . Тогда может показаться, что общее число частиц равно  $8N$ , так как у кубика 8 вершин. Однако это неверно. Действительно, ведь каждая частица относится не к одному, а к 8 кубикам, поэтому была учтена 8 раз. Значит всего частиц  $\frac{8N}{8} = N$ . Пусть масса одной частицы  $m$ , а объем одной ячейки  $V$ . Тогда плотность материала

$$\rho_1 = \frac{Nm}{NV} = \frac{m}{V}. \quad (30)$$

В материале с дополнительными частицами в центрах кубиков число частиц равно  $\frac{8N}{8} + N = 2N$ , и плотность

$$\rho_2 = \frac{2Nm}{NV} = 2\frac{m}{V}. \quad (31)$$

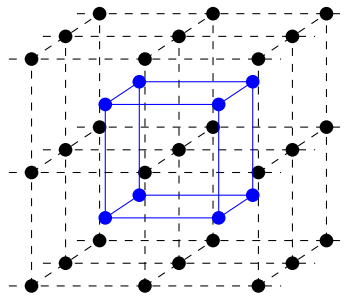
Тогда, если

$$\rho_1 = 8 \text{ г/см}^3, \quad \rho_2 = 2\rho_1 = 16 \text{ г/см}^3. \quad (32)$$

**Ответ:** Плотность получившегося материала равна  $16 \text{ г/см}^3$

*При решении мы неверно учли частицы, расположенные на границе материала. Однако доля таких частиц очень мала, поэтому их вкладом можно пренебречь.*

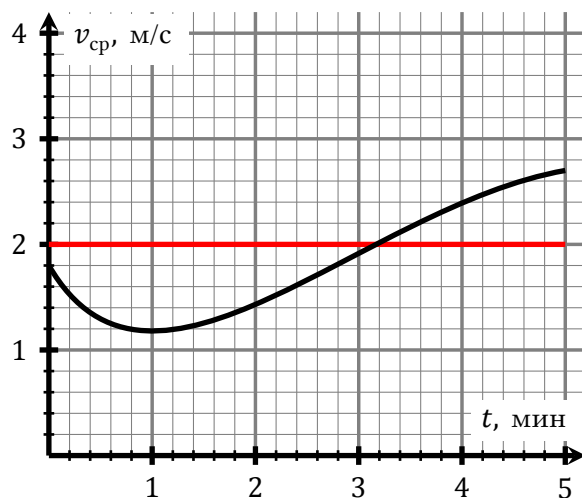
Кроме того можно предложить альтернативное решение. В материале с дополнительными частицами можно увидеть, что дополнительные частицы образуют такую же решетку, сдвинутую относительно основной.



Тогда можно сказать, что в одном и том же объеме количество частиц в разных материалах отличается в два раза. Зная это, можно получить финальный ответ.

## Задача 5. Прогулки по воде

Вспомним определение средней скорости. Средняя скорость  $v_{\text{ср}}$  за какой-то промежуток времени  $t$  равна расстоянию  $s$  пройденному за это время, деленному на  $t$ . Тогда в данной задаче, если мальчики встретились, то пройденные ими расстояния равны, а значит равны и средние скорости в момент встречи. Пользуясь этим утверждением, можно найти момент встречи по графику.



Так как Павел бежит с постоянной скоростью, его средняя скорость равна постоянной

$$v_{\text{ср.}} = v = 2 \text{ м/с.} \quad (33)$$

Следовательно, точка, в которой график пересекает горизонтальную линию на уровне 2 м/с соответствует моменту встречи мальчиков. Исходя из графика  $t \approx 3,2$  минуты. Тогда пройденное расстояние можно вычислить

$$s = vt = 2 \text{ м/с} \cdot 3,2 \cdot 60 \text{ с} = 384 \text{ м} \quad (34)$$

**Ответ:** Мальчики встретятся на расстоянии 384 м