Городской тур 2019/20. 11 класс

Задача 1.

Рассмотрим движение бусинки массой m с зарядом q по стержню. На бусинку действует четыре силы: сила реакции N , сила тяжести $F_т$, сила Кулона со стороны гвоздика $F_К$ и сила трения $F_{тр}$. Изменение кинетической энергии равно работе всех сил:

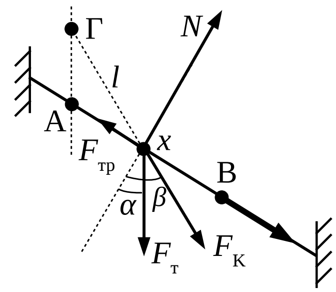

Рис. 1:

$$\Delta E_{кин} = \frac{mv^2}{2} = A_N + A_т + A_К + A_{тр}\,. \tag{1}$$

Сила реакции работу не совершает: $A_N = 0$. Сила тяжести и сила Кулона являются потенциальными силами, поэтому их работа равна изменению потенциальной энергии в поле тяжести и электрическом поле гвоздика с обратным знаком,

$$A_т = -mg\Delta h\,, \qquad A_К = -q\Delta\varphi\,, \tag{2}$$

где $\Delta h = h_B - h_A$ — изменение высоты бусинки над уровнем земли, $\Delta\varphi = \varphi_B - \varphi_A$ — изменение электрического потенциала. Поскольку бусинка скользит, сила трения равна $F_{тр} = \mu N$. Выпишем второй закон Ньютона для бусинки в проекции на ось, перпендикулярную стержню (Q — заряд гвоздика, см. прочие обозначения на Рис. 1):

$$N = F_т\cos\alpha + F_К\cos\beta = mg\cos\alpha + \frac{kqQ}{l^2}\cos\beta\,. \tag{3}$$

Будем отсчитывать координату x бусинки вдоль стержня от точки A. При движении бусинки по стержню расстояние $l = l(x)$ и угол $\beta = \beta(x)$ изменяются, а значит, сила трения зависит от положения бусинки: $F_{тр}(x) = \mu N(x)$. Работа силы трения определяется выражением

$$A_{тр} = -\sum_i \mu N(x_i)\Delta x_i = -\int\limits_0^{|AB|} \mu N(x)\,dx\,. \tag{4}$$

Для решения задачи вычислять выражение (4) не нужно. Достаточно заметить, что с учётом (3) оно имеет вид

$$A_{тр} = mC_1 + qC_2\,, \tag{5}$$

где коэффициенты C_1 и C_2 не зависят от массы и заряда бусинки и определяются только геометрией задачи. Подставляя (5) и (2) в (1), получаем

$$\frac{mv^2}{2} = -mg\Delta h - q\Delta\varphi + mC_1 + qC_2\,. \tag{6}$$

Величины Δh и $\Delta\varphi$ также не зависят от m и q, поэтому (6) можно переписать следующим образом:

$$v^2 = \tilde{C}_1 + \frac{q}{m}\tilde{C}_2\,, \tag{7}$$

где введены новые константы $\tilde{C}_1$ и $\tilde{C}_2$.

Согласно условию, при запуске бусинки массой m с зарядом q скорость равна v_1, если заряд $2q$, то скорость v_2. Следовательно,

$$v_1^2 = \tilde{C}_1 + \frac{q}{m}\tilde{C}_2\,, \qquad v_2^2 = \tilde{C}_1 + \frac{2q}{m}\tilde{C}_2\,. \tag{8}$$

Решая эту систему, получаем

$$\frac{q}{m}\tilde{C}_2 = v_2^2 - v_1^2, \qquad \tilde{C}_1 = 2v_1^2 - v_2^2\,. \tag{9}$$

Таким образом, при запуске бусинки массой $3m$ с зарядом q скорость в точке B будет равна

$$v_3 = \sqrt{\tilde{C}_1 + \frac{q}{3m}\tilde{C}_2} = \sqrt{\frac{5v_1^2 - 2v_2^2}{3}}\,. \tag{10}$$

Ответ: скорость бусинки массой $3m$ с зарядом q в точке B равна $v_3 = \sqrt{(5v_1^2 - 2v_2^2)/3}$

Задача 2.

Определим, с какой скоростью u_0 Леголас оттолкнулся от земли, чтобы подпрыгнуть на высоту $h_0 = 9$ м,

$$h_0 = \frac{u_0^2}{2g} \quad \Leftrightarrow \quad u_0 = \sqrt{2gh_0}\,. \tag{11}$$

Леголас встретится с первым камнем на высоте h_0. Обозначим через h_i высоту, на которой он оттолкнётся от $(i+1)$-го камня. Скорость камня на этой высоте равна

$$H - h_i = \frac{V^2}{2g} \quad \Leftrightarrow \quad V = \sqrt{2g(H - h_i)}\,. \tag{12}$$

Поскольку процесс отталкивания происходит быстро, импульс силы тяжести не успевает изменить импульс системы "камень–Леголас" за время их взаимодействия. Поэтому имеем

$$MV = MV' - mu\,, \tag{13}$$

где m и M — массы Леголаса и камня соответственно, u — скорость Леголаса после прыжка, а V' — новая скорость камня. Кроме того, по условию Леголас отталкивается относительно любой поверхности с одинаковой скоростью, поэтому

$$u + V' = u_0\,. \tag{14}$$

Решая систему уравнений (13) и (14), получаем

$$u = \frac{u_0 - V}{1 + m/M}\,. \tag{15}$$

Имея такую скорость, Леголас сможет подняться вверх на высоту

$$\Delta h_i = \frac{u^2}{2g}\,. \tag{16}$$

Таким образом, он окажется на высоте

$$h_{i+1} = h_i + \Delta h_i = h_i + \frac{h_0 - 2\sqrt{h_0(H - h_i)} + H - h_i}{(1 + m/M)^2}\,, \qquad i = 0, 1, 2, ... \tag{17}$$

Выражение (17) представляет собой рекуррентное соотношение, которое позволяет рассчитать высоту, на которую в итоге поднимается Леголас. Подставляя численные значения, с учётом того, что $m/M = 0.1$, получаем

$$h_1 \approx 9.83 \text{ м}\,, \qquad h_2 \approx 11.05 \text{ м}\,, \qquad h_3 \approx 13.18 \text{ м}\,. \tag{18}$$

Таким образом, чтобы помочь Леголасу подняться на высоту $H = 13$ м, Гимли придётся сбросить три камня.

Ответ: три камня.

Задача 3.

Рассмотрим силы, действующие на ползунок (см. Рис. 2) сразу после того, как его перестали удерживать. Поскольку стержень безмассовый, он действует на ползунок с силой некоторой величины T, направленной вдоль стержня. Проекция этой силы на горизонтальную ось в общем случае заставляет ползунок двигаться вправо с ускорением $a_x \geqslant 0$. Запишем второй закон Ньютона в проекции на горизонтальную и вертикальную оси:

$$Ma_x = T\sin\varphi - F_{\text{тр}}\,, \tag{19}$$
$$N = T\cos\varphi + Mg\,. \tag{20}$$

Проекция силы трения не может превосходить μN и в точности совпадает с μN при ненулевом значении ускорения a_x. Чтобы понять, какая ситуация реализуется, требуется рассмотреть движение груза, на который также действует сила величины T, направленная вдоль стержня (см. Рис. 3). Удобно записать второй закон Ньютона в проекции на оси, направленные вдоль стержня и перпендикулярно ему:

$$ma_n = T - mg\cos\varphi\,, \tag{21}$$

$$ma_\tau = mg\sin\varphi\,. \tag{22}$$

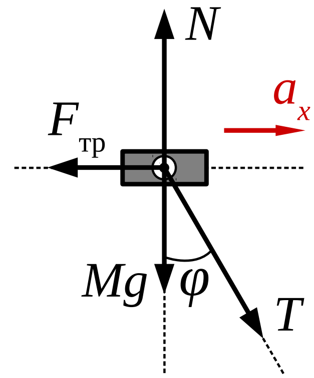

Рис. 2:

Направления нормальной и тангенциальной компонент ускорения заданы на Рис. 3, причём из уравнения (22) уже ясно, что $a_\tau = g\sin\varphi$. Осталось определить величину a_n.

В приведённых выше уравнениях пока никак не учитывается тот факт, что стержень имеет постоянную длину, так что следует ещё выписать соответствующую кинематическую связь. Хорошо известно, что в терминах скоростей жёсткость стержня отвечает условию того, что относительная скорость его концов в проекции на сам стержень должна быть равна нулю. Выясним, какое условие возникает при рассмотрении ускорений. Пусть в данной системе отсчёта (СО рельса) положения концов стержня задаются радиус-векторами $\boldsymbol{r}_m$ и $\boldsymbol{r}_M$ соответственно, которые зависят от времени. Тогда условие постоянства длины стержня l можно записать в виде

$$(\boldsymbol{r}_m - \boldsymbol{r}_M)^2 = l^2 = \text{const}\,. \tag{23}$$

Рассмотрим изменение левой части за малое время Δt и приравняем его к нулю:

$$2(\boldsymbol{r}_m - \boldsymbol{r}_M)\cdot(\Delta\boldsymbol{r}_m - \Delta\boldsymbol{r}_M) = 0\,, \tag{24}$$

где в левой части стоит скалярное произведение и мы отбросили член второго порядка малости. Разделив это выражение на $2\Delta t$, получаем:

$$(\boldsymbol{r}_m - \boldsymbol{r}_M)\cdot(\boldsymbol{v}_m - \boldsymbol{v}_M) = 0\,. \tag{25}$$

Поскольку разность радиус-векторов направлена вдоль стержня, мы получили как раз то условие на скорости, которое упоминалась выше. В данном случае это означает, что скорость груза направлена перпендикулярно стержню, поскольку ползунок покоится. Чтобы получить условие на ускорения, нужно еще раз проварьировать данное уравнение (рассмотреть изменение левой части за время Δt). Заметим, что в формуле (25) нельзя класть $\boldsymbol{v}_M = \boldsymbol{0}$ до выполнения варьирования, т. к. ускорение ползунка в общем случае отлично от нуля. Имеем следующее:

$$(\boldsymbol{r}_m - \boldsymbol{r}_M)\cdot(\boldsymbol{a}_m - \boldsymbol{a}_M) + (\boldsymbol{v}_m - \boldsymbol{v}_M)^2 = 0\,. \tag{26}$$

Иначе говоря, уравнение (26) было получено путём двукратного дифференцирования уравнения (23) по времени. Теперь с учётом выбранных направлений ускорений условие (26) записывается в виде

$$(-a_n - a_x\sin\varphi)l + v^2 = 0\,, \tag{27}$$

где v — скорость груза. Заметим, что если ускорение ползунка не равно нулю, то $a_n < v^2/l$, что означает, что радиус кривизны траектории груза становится больше l. Другой способ получить условие (27) состоит в переходе в систему отсчёта ползунка, где траектория груза представляет собой дугу окружности. В этой СО достаточно учесть переносное ускорение и записать, что центростремительное ускорение равно v^2/l (скорость v остаётся прежней, поскольку скорость ползунка равна нулю).

Чтобы в дальнейшем использовать кинематическую связь (27), нужно определить скорость груза в интересующий нас момент времени. Это легко сделать с использованием закона сохранения энергии. Поскольку ползунок не двигался, работу совершала только сила тяжести. Получаем

$$\frac{mv^2}{2} = mgl\cos\varphi \quad\Leftrightarrow\quad \frac{v^2}{l} = 2g\cos\varphi\,. \tag{28}$$

Таким образом, уравнение (27) запишется в виде

$$a_n + a_x\sin\varphi = 2g\cos\varphi\,. \tag{29}$$

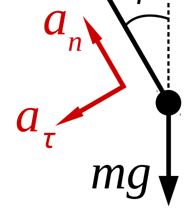

Рис. 3:

Теперь необходимо решить систему уравнений (19)–(22) и (29). Рассмотрим отдельно два случая.

Случай 1. Ускорение ползунка равно нулю ($a_x = 0$).

Решая систему, получаем:

$$T = 3mg\cos\varphi\,, \tag{30}$$

$$F_{\text{тр}} = \frac{3}{2}mg\sin 2\varphi\,, \tag{31}$$

$$N = 3mg\cos^2\varphi + Mg\,. \tag{32}$$

$$a_n = 2g\cos\varphi = \frac{v^2}{l}\,. \tag{33}$$

Отсюда возникает условие на коэффициент трения:

$$\mu \geqslant \frac{\frac{3}{2}\frac{m}{M}\sin 2\varphi}{1 + 3\frac{m}{M}\cos^2\varphi}\,. \tag{34}$$

Данный результат следует интерпретировать следующим образом. Если коэффициент трения достаточно большой, т. е. удовлетворяет условию (34), то ползунок остаётся на месте, а груз имеет только тангенциальную составляющую ускорения, равную $a_\tau = g\sin\varphi$. Если же условие (34) не выполняется, то ползунок будет иметь ненулевое ускорение. Далее рассмотрим этот случай.

Случай 2. Ускорение ползунка не равно нулю ($a_x \neq 0$).

В этом случае мы имеем соотношение $F_{\text{тр}} = \mu N$. Тогда с учётом остальных уравнений находим:

$$a_x = \frac{3\frac{m}{M}\cos\varphi\,(\sin\varphi - \mu\cos\varphi) - \mu\sin\varphi}{1 + \frac{m}{M}\sin\varphi(\sin\varphi - \mu\cos\varphi)}g\,, \tag{35}$$

$$a_n = \frac{2\cos\varphi + \mu\sin\varphi\,(1 + \frac{m}{M}\cos^2\varphi) - \frac{m}{M}\sin^2\varphi\cos\varphi}{1 + \frac{m}{M}\sin\varphi(\sin\varphi - \mu\cos\varphi)}g\,. \tag{36}$$

Заметим, что при точном равенстве в условии (34) ускорение a_x обращается в нуль, а $a_n = 2g\cos\varphi$. Теперь можно сформулировать ответ на вопрос задачи.

Ответ: $a_\tau = g\sin\varphi$; при выполнении условия (34) $a_n = 2g\cos\varphi$; если условие (34) не выполняется, то нормальное ускорение задаётся выражением (36).

Задача 4.

Если в результате передачи системе малого количества теплоты ΔQ её температура возрастает на ΔT, то, по определению, теплоёмкость системы есть $C = \Delta Q/\Delta T$. Найдём теплоёмкость системы из условия задачи.

Система включает идеальный газ и жидкость, которые пребывают в тепловом равновесии. Переданное системе тепло ΔQ распределяется между газом и жидкостью таким образом, чтобы в итоге тепловое равновесие не нарушилось. Для нагрева жидкости на ΔT необходимо затратить тепло $\Delta Q_{\text{ж}} = C_{\text{ж}}\Delta T$. Таким образом, газ получает тепло $\Delta Q_{\text{г}} = \Delta Q - \Delta Q_{\text{ж}}$. Согласно первому началу термодинамики, переданное газу тепло идет на работу против внешних сил ΔA и на изменение его внутренней энергии ΔU,

$$\Delta Q_{\text{г}} = \Delta A + \Delta U\,. \tag{37}$$

Для одноатомного идеального газа

$$\Delta U = \frac{3}{2}\nu R\Delta T\,. \tag{38}$$

Разберёмся с работой газа. Давление газа складывается из давления атмосферы и гидростатического давления жидкости,

$$p_{\text{г}} = p_0 + \rho g(h_1 - h_2)\,. \tag{39}$$

При малом перемещении нижнего поршня на Δh_2 объём газа изменяется на $\Delta V_{\text{г}} = S_2\Delta h_2$, при этом он совершает работу

$$\Delta A = p_{\text{г}}\Delta V_{\text{г}} = p_{\text{г}}S_2\Delta h_2\,. \tag{40}$$

Необходимо найти связь между изменением высоты поршня Δh_2 и приращением температуры ΔT. Выпишем уравнение состояния газа "до" передачи ему тепла

$$p_г V_г = [p_0 + \rho g(h_1 - h_2)]S_2 h_2 = \nu RT\,, \tag{41}$$

где T — начальная температура газа. Уравнение состояния "после" передачи тепла имеет вид

$$[p_0 + \rho g(h_1 + \Delta h_1 - h_2 - \Delta h_2)]S_2(h_2 + \Delta h_2) = \nu R(T + \Delta T)\,, \tag{42}$$

где Δh_1 — изменение высоты верхнего поршня. Рассмотрим разницу уравнений (41) и (42), отбрасывая величины второго порядка малости:

$$\rho g(\Delta h_1 - \Delta h_2)S_2 h_2 + [p_0 + \rho g(h_1 - h_2)]S_2 \Delta h_2 = \nu R \Delta T. \tag{43}$$

Поскольку жидкость несжимаемая, её объем остается постоянным и равным

$$V_ж = S_1(h_1 - H) + S_2(H - h_2) = S_1(h_1 + \Delta h_1 - H) + S_2(H - h_2 + \Delta h_2)\,, \tag{44}$$

где H — высота нижней части сосуда. Таким образом,

$$S_1 \Delta h_1 = S_2 \Delta h_2\,. \tag{45}$$

Собрав все уравнения вместе, получаем окончательный ответ для теплоёмкости:

$$C = C_ж + \frac{3}{2}\nu R + \frac{p_0 + \rho g(h_1 - h_2)}{p_0 + \rho g\left[\left(\frac{S_2}{S_1} - 2\right)h_2 + h_1\right]}\nu R\,. \tag{46}$$

Ответ: Теплоёмкость системы задаётся выражением (46).

Задача 5.

К сожалению, в связи с ошибкой, допущенной жюри, решение данной задачи не удаётся получить в общем случае (для произвольного n) в замкнутом виде. Жюри приносит свои извинения участникам олимпиады.

Ниже представлено частичное решение задачи для случая чётного n, которое оценивалось из 10 баллов.

Рассмотрим одну ячейку решётки. По закону Фарадея в данном контуре возникает ЭДС индукции из-за наличия изменяющегося магнитного потока. Зависимость потока от времени задается следующим выражением:

$$\Phi(t) = BS\sin\omega t\,. \tag{47}$$

Тогда ЭДС индукции равна $\varepsilon(t) = -\Delta\Phi/\Delta t = -BS\omega\cos\omega t$.

Для определения токов в исходной схеме введём контурные токи, как показано на Рис. 4. Реальный ток, протекающий по заданному ребру решётки либо равен разности контурных токов в соседних ячейках, либо совпадает с одним из них, если ребро выбрано на границе решётки. Такой выбор переменных автоматически учитывает сохранение заряда в узлах схемы. Заметим, что в силу наличия симметрии достаточно рассмотреть лишь четверть решётки, включающую $m \equiv n^2/2$ ячеек. Запишем законы Кирхгофа в терминах соответствующих контурных токов:

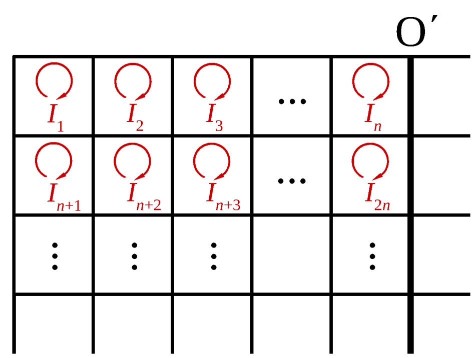

Рис. 4:

$$4I_1 - I_2 - I_{n+1} = \varepsilon/R\,, \tag{48}$$
$$4I_2 - I_1 - I_3 - I_{n+2} = \varepsilon/R\,, \tag{49}$$
$$4I_3 - I_2 - I_4 - I_{n+3} = \varepsilon/R\,, \tag{50}$$
$$\ldots$$
$$3I_n - I_{n-1} - I_{2n} = \varepsilon/R\,, \tag{51}$$
$$4I_{n+1} - I_1 - I_{n+2} - I_{2n+1} = \varepsilon/R\,, \tag{52}$$
$$\ldots$$

Поскольку система уравнений является линейной, искомые токи можно представить в виде $I_k = \alpha_k \varepsilon(t)/R$, где $k = 1, ..., m$. Иными словами, зависимость токов от времени задаётся функцией $\varepsilon(t)$, в то время как коэффициент пропорциональности для каждой ячейки свой. Полную систему для нахождения безразмерных коэффициентов α_k удобно представить в матричном виде. Например, для $n = 4$ ($m = 8$) матрица имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} . \tag{53}$$

Умножение в левой части производится по правилу “строка на столбец”, как показано в следующем примере:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha + b\beta \\ c\alpha + d\beta \end{pmatrix} . \tag{54}$$

В общем случае матрица системы имеет пятидиагональную форму. К сожалению, решить такую систему в общем виде не получается. Представим решения для $n = 2$ и $n = 4$:

$$n = 2 : \qquad \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} , \tag{55}$$

$$n = 4 : \qquad \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2099/2245 \\ 3164/2245 \\ 739/449 \\ 3916/2245 \\ 2987/2245 \\ 4617/2245 \\ 1091/449 \\ 5808/2245 \end{pmatrix} . \tag{56}$$

Заметим, что соседние контурные токи не совпадают, т. е. ток протекает по каждому из рёбер внутри рассматриваемой четверти схемы. Аналогичные уравнения можно написать и для нечетного n. В этом случае мы будем иметь $n(n+1)/2$ неизвестных.

Мощность, которая выделяется при прохождении тока удобно вычислять по формуле $P = I^2 R$, при этом требуется просуммировать данное выражение по всем рёбрам решётки. Отсюда следует, что суммарная мощность пропорциональна величине $\varepsilon^2(t)/R$ с некоторым безразмерным коэффициентом N_n, который можно получить, решив систему линейных уравнений $m \times m$:

$$P_{\text{общ}}(t) = N_n \, \frac{B^2 S^2 \omega^2}{R} \cos^2 \omega t \, . \tag{57}$$

Для определения тепла необходимо проинтегрировать данную мощность по периоду ($T = 2\pi/\omega$):

$$Q = N_n \, \frac{B^2 S^2 \omega^2}{R} \int\limits_0^T \cos^2 \omega t \, dt = N_n \, \frac{B^2 S^2 \omega^2}{2R} \int\limits_0^T (1 + \cos 2\omega t) \, dt \, . \tag{58}$$

Первое слагаемое под знаком интеграла не зависит от времени, что позволяет провести интегрирование простым домножением на величину периода. Второе же слагаемое вклада не даст, поскольку участки с разными знаками при интегрировании по периоду полностью компенсируют друг друга. Имеем:

$$Q = N_n \, \frac{\pi B^2 S^2 \omega}{R} \, . \tag{59}$$

Аналогичным образом следует искать количество теплоты в отсутствие одного из рёбер. Однако, в этом случае пропадает симметрия решётки, т. е. система уравнений существенно усложняется.

При проверке работ баллы выставлялись в соответствии со следующими критериями:

Сказано, что ЭДС индукции определяется скоростью изменения магнитного потока (2 балла)
Отмечено, что выделяемая тепловая мощность пропорциональна квадрату ЭДС индукции (1 балл)
Вычислено выражение вида $\int_0^T \cos^2 \omega t \, dt = T/2$ (1 балл)

Если решение основано на том, что ток не течёт по внутренним ребрам	*Если решение основано на использовании законов Кирхгофа*
Вычислено выделившееся тепло для исходной схемы (2 балла) Исследованы схемы в отсутствие одного из рёбер и найден ответ на второй вопрос задачи (2 балла)	Выписаны уравнения Кирхгофа для части схемы или для частного случая n (4 балла) [2 балла из 4-х даётся за использование соображений симметрии для уменьшения числа неизвестных] Получена полная система уравнений для нахождения токов в схеме (2 балла)