11 класс

11 класс. Задача 1: “Соударение шаров”

Коэффициентом восстановления скорости называется отношение модуля скорости шара после удара к модулю его скорости перед ударом в случае, если шар налетает на абсолютно твердую неподвижную стенку перпендикулярно поверхности.

Подвесьте выданные вам шары на бифилярных подвесах так, чтобы обеспечить центральное соударение шаров.

1. Определите отношение масс большого и малого шаров δ.

2. Определите коэффициент восстановления скорости k каждого шара при ударе двух одинаковых шаров.

3. Определите коэффициенты восстановления скорости k_1, k_2 каждого шара при ударе двух разных шаров.

Оборудование: штатив с лапкой, дощечка, 3 шара, 2 нитки, скрепки, линейка.

Решение

1. Из закона сохранения импульса

$$m_1 v_0 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \text{ или } p_0 = p_1 + p_2. \quad (1)$$

Отпуская первый шар с высоты h_0, после соударения шары поднимутся на высоты h_1 и h_2. Для определения высот при малых углах удобнее и точнее фиксировать горизонтальное смещение шариков $\Delta x_0, \Delta x_1, \Delta x_2$, находя высоты с помощью теоремы Пифагора, зная вертикальное расстояние от центров шариков до плоскости крепления нитей l.

$$h = l - \sqrt{l^2 - \Delta x^2}. \quad (2)$$

Из закона сохранения энергии

$$m_1 g h_0 = \frac{p_0^2}{2m_1},\ m_1 g h_1 = \frac{p_1^2}{2m_1},\ m_2 g h_2 = \frac{p_2^2}{2m_2},$$

$$2m_1^2 g h_0 = p_0^2,\ 2m_1^2 g h_1 = p_1^2,\ 2m_2^2 g h_2 = p_2^2.$$

Подставляя в (1), получим

$$m_1\sqrt{h_0} = m_1\sqrt{h_1} + m_2\sqrt{h_2},$$

$$\delta = \frac{m_1}{m_2} = \frac{\sqrt{h_2}}{\sqrt{h_0} - \sqrt{h_1}}. \quad (3)$$

Если $l >> x$, то

$$h = l - \sqrt{l^2 - \Delta x^2} = l - l\sqrt{1 - \frac{\Delta x^2}{l^2}} \approx l - l\left(1 - \frac{\Delta x^2}{2l^2}\right) = \frac{\Delta x^2}{2l}.$$

$$\delta = \frac{m_1}{m_2} \approx \frac{\Delta x_2}{\Delta x_0 - \Delta x_1}. \quad (3^*)$$

2. Отклоняя два одинаковых шарика на равные расстояния Δx_0 от положения равновесия, и сталкивая их, отметим, на какие расстояния Δx_1 они отскочат от положения равновесия после удара.

$$m_1 gl(1-\cos\alpha_0) = \frac{m_1 v_1^2}{2},\ m_1 gl(1-\cos\alpha_1) = \frac{m_1 u_1^2}{2} = \frac{m_1 k^2 v_1^2}{2},$$

$$k = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha_1}{1-\cos\alpha_0}}. \quad (4)$$

При малых углах

$$k \approx \sqrt{\frac{1-\left(1-\frac{\alpha_1^2}{2}\right)}{1-\left(1-\frac{\alpha_0^2}{2}\right)}} = \frac{\alpha_1}{\alpha_0} \approx \frac{\Delta x_1}{\Delta x_0}. \quad (4^*)$$

3. Модели абсолютно упругого и абсолютно неупругого соударений являются крайними случаями частично упругого соударения, при котором часть энергии переходит в тепловую форму. Для описания общего случая *не вполне упругого удара* Ньютоном был введен коэффициент восстановления скорости шара. *Нормальный коэффициент восстановления скорости* определяют как отношение нормальной составляющей скорости касающейся поверхности шара после отскока от неподвижной абсолютно жесткой стенки к составляющей скорости шара до удара, взятому с обратным знаком

$$k = -u/v.$$

Если после соударения форма шара полностью восстанавливается, то $k=1$, потери энергии отсутствуют и удар абсолютно упругий. Если после соударения шар остается сплющенным и прилипает к стене, то удар абсолютно неупругий.

В системе отсчета, связанной с центром масс соударяющихся шаров, можно считать, что каждый шар налетает на неподвижную абсолютно жесткую стенку, и можно ввести нормальные коэффициенты восстановления $k_1 = -u_1/v_1$, $k_2 = -u_2/v_2$.

Пусть движущийся первый шар налетает на второй покоящийся шар. Рассмотрим удар в системе отсчета, связанной с центром масс соударяющихся тел. Скорость центра масс

$$v_c = m_1 v_1 / (m_1 + m_2).$$

Переходя в систему отсчета, связанную с центром масс,

$$v_{1c} = v_1 - v_c = \frac{m_2 v_1}{m_1 + m_2},\ v_{2c} = -v_c = -\frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}.$$

Вычисляя скорости после соударения, имеем

$$u_{1c} = -k_1 \frac{m_2 v_1}{m_1 + m_2},\ u_{2c} = k_2 \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}.$$

В системе центра масс суммарный импульс равен нулю. Из закона сохранения импульса после соударения получаем, что $k_1 = k_2 = k$.

Возвращаясь в исходную неподвижную систему отсчета, имеем

$$u_1 = u_{1c} + v_c = \frac{-km_2 + m_1}{m_1 + m_2} v_1,$$

$$u_2 = u_{2c} + v_c = \frac{km_1 + m_1}{m_1 + m_2} v_1.$$

При отклонении привязанного к нити первого шара от положения равновесия на угол α_0 его потенциальная энергия переходит в кинетическую

$$m_1 gl(1 - \cos\alpha_0) = \frac{m_1 v_1^2}{2}.$$

После соударения кинетическая энергия каждого из шаров переходит в потенциальную энергию.

$$m_1 gl(1 - \cos\alpha_1) = \frac{m_1 u_1^2}{2},\ m_2 gl(1 - \cos\alpha_2) = \frac{m_2 u_2^2}{2}$$

Отсюда можем найти коэффициенты восстановления для каждого из шаров

$$k = \frac{m_1}{m_2} - \frac{m_1 + m_2}{m_2} \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha_1}{1 - \cos\alpha_0}}, \tag{5}$$

$$k = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha_2}{1 - \cos\alpha_0}} - 1. \tag{6}$$

Значение k может быть найдено по любой из формул (5) или (6).

При малых углах

$$k \approx \frac{m_1}{m_2} - \frac{m_1 + m_2}{m_2} \frac{\Delta x_1}{\Delta x_0}, \tag{5*}$$

$$k \approx \frac{m_1 + m_2}{m_1} \frac{\Delta x_2}{\Delta x_0} - 1. \tag{6*}$$

Критерии оценивания

1. Использованы длинные нити, высокая степень бифиллярности (подвесы далеко друг от друга), шары не давят друг на друга (нити вертикальны) — 1 балл
2. Получена и использована (2); если измерялось сразу h, балл не ставится — 1 балл
3. Получена формула (3) или (3*); — 1 балл
4. Определены отношения масс δ для двух случаев удара (малый-большой и большой-малый), проведено сравнение ($\delta_1 = 1/\delta_2$), результат совпал с тестом. 2 балла

   Если отношение масс шаров найдено не на основе соударения, а взвешиванием на линейке, то вместо 4 баллов за пп. 2, 3 и 4 ставится 1 балл
5. Получена формула (4) или (4*) (возможно решение на основе (5), (6)) — 2 балла
6. Определен k для столкновения одинаковых шаров, результат «в воротах» — 2 балла
7. Оценена погрешность — 1 балл

8. Получены формулы (5) и (6) или (5*) и (6*), или же одна из них, но указано, что $k_1 = k_2 = k$ 2 балла
9. Определены k для столкновения разных шаров, для двух случаев удара (малый-большой и большой-малый), результаты «в воротах» 0.55… 0.8 2 балла
10. Оценена погрешность 1 балл

11 класс. Задача 2: “Электромотор”

Исследуйте зависимость момента трения вертушки о воздух от угловой скорости вращения вертушки ω. Вращающий момент электродвигателя постоянного тока пропорционален силе протекающего через него тока $M = kI$.

Известно, что момент трения вертушки о воздух описывается законом $M_в = a\omega^b$. Определите из эксперимента значение b.

Внимание! На электромотор больше 3.5 В не подавать!

Решение

Пусть U – ЭДС источника, r – его внутреннее сопротивление, R – сопротивление обмотки электродвигателя, I – сила тока, необходимая для равномерного вращения и создающая необходимый вращающий момент. Мощность источника расходуется на потери на сопротивлении источника и обмотке электродвигателя и на потери мощности на сопротивление воздуха вертушке $M_в\omega$ и трение в моторе $M_x\omega$:

$$IU = I^2(R+r) + (M_в + M_x)\omega \tag{1}$$

В отсутствии вращения при малых напряжениях

$$U_0 = I_0(r+R),$$

$$r + R = \frac{U_0}{I_0}, \tag{2}$$

где U_0 – напряжение, до которого вращение отсутствует.

Во время вращения с вертушкой

$$IU = I^2(R+r) + M\omega = I^2(R+r) + kI\omega,$$

$$U = I(R+r) + k\omega,$$

$$\omega = \frac{1}{k}\left(U - I\frac{U_0}{I_0}\right). \tag{3}$$

На холостом ходу

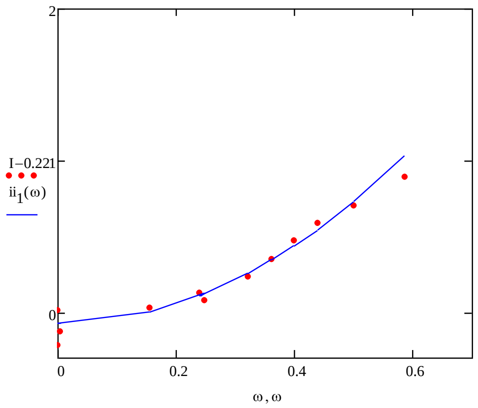
$$\omega_x = \frac{1}{k}\left(U_x - I_x\frac{U_0}{I_0}\right),$$

при этом ω_x превышает ω больше, чем в 10 раз, так что можно считать, что в диапазоне угловых скоростей с вертушкой момент трения примерно постоянен и равен

$$M = kI_{x0}, \tag{4}$$

где I_{x0} – ток, при котором начинается вращение мотора на холостом ходу, определенный по первым нескольким точкам измерения при малых U.

Чтобы выяснить характер зависимости $M_в(\omega)$, построим зависимость пропорциональных величин $\frac{M_в}{k} = \frac{M - M_x}{k} = I - I_{x0}$ от $\left(U - I\frac{U_0}{I_0}\right) = k\omega$.



Логарифмированием и построением линейной зависимости по угловому коэффициенту находим степень. Результат $b = 1.995$ по тестовому эксперименту.

Критерии оценивания

Если решающий задачу человек понял, что потери на сопротивление воздуха вертушке определяются разностью между потребляемой энергией с вертушкой и энергией, затрачиваемой на холостом ходу при одинаковой угловой скорости, то

1. Приведена формула (1) 2 балла
2. Получена формула (2) 1 балл
3. Получена формула (3) 2 балла
4. Получена формула (4) из замера, расчета и соображения перед ней 2 балла

Если решающий задачу человек считает, что вся мощность идет на сопротивление вертушке, то вместо этих пунктов получает 1 балл за конечную формулу, если учитывает потери посредством КПД электродвигателя, то 2 балла.

5. Проделаны измерения $I(U)$ 1 балл
6. Проделаны измерения $I_x(U)$ 1 балл
7. Данные сведены в таблицу и указаны приборные погрешности 1 балл
8. Построена зависимость $\ln(I - I_{x0})$ от $\ln(U - IU_0/I_0)$, 3 балла

   если не учтено I_{x0}, то за этот пункт 2 балла

   если неверны шкала, обозначение осей, масштаб, то 1 балл
9. Найдено верное b (в диапазоне от 1.7 до 2.35) 1 балл
10. Корректно оценена погрешность b 1 балл