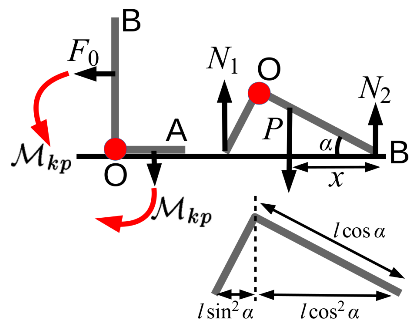
Городской тур 2019/20. 10 класс

Задача 1.

Рассмотрим сначала лестницу в ситуации, когда её ломают (см. рис. 1, слева). Определим моменты действующих на неё сил относительно точки О.

Рис. 1:



По условию лестница ломается, когда момент силы, приложенной к вертикальному отрезку лестницы равен $\mathcal{M}_{kp} = F_0 h$ (момент – произведение ломающей силы на её плечо). Этот момент стремится повернуть лестницу – как единое целое – против часовой стрелки вокруг точки О. Одновременно к горизонтальному отрезку лестницы приложена со стороны пола некоторая сила с таким же вращающим моментом, но противоположно направленным (по часовой стрелке); это препятствует повороту лестницы против часовой стрелки. Оба момента компенсируют друг друга.

Однако оба они «стремятся развернуть» прямой угол лестницы (превратив его в тупой). Как только противоборствующие моменты достигают $\mathcal{M}_{kp}$, в точке О происходил разлом.

Изобразим теперь силы, действующие на лестницу, когда по ней идёт человек (см. рис. 1, справа): N_1, N_2 – силы реакции пола и $P = mg$ – вес человека. На рис. 1 (внизу) также отмечены длины отрезков треугольника, найденные из геометрических соображений.

Пусть человек располагается на расстоянии x по горизонтали от точки В (предположим пока, что он правее точки О, то есть что $x < l\cos^2\alpha$).

Условие того, что лестница не вращается как единое целое относительно точки В даёт

$$mgx = N_1 l \qquad \Rightarrow \qquad N_1 = mgx/l.$$

Здесь мы учли, что плечо силы mg относительно этой точки равно x, плечо силы N_1 равно l, а плечо силы N_2 – нулю.

Относительно точки О момент силы N_1, равен $\mathcal{M} = N_1 l \sin^2\alpha = mgx\sin^2\alpha$. Этот момент пытается вращать всю лестницу по часовой стрелке. Ему противодействуют моменты двух остальных сил, N_2 и mg, приложенные к другому отрезку лестницы. Суммарный момент сил N_2 и mg тоже равен $\mathcal{M}$ (но направлен против часовой стрелки). Очевидно, как и в первом случае, каждый из моментов $\mathcal{M}$, приложенных к разным отрезкам лестницы, занимается тем, что "пытается превратить" прямой угол лестницы в тупой. Компенсировать друг друга они могут только пока каждый из них не превзойдёт $\mathcal{M}_{kp}$.

С ростом x величина $\mathcal{M}$ растёт и принимает максимальное значение при $x = l\cos^2\alpha$. Как раз в этот момент человек находится в точке О. Чтобы он не сломал лестницу в этот момент, нужно, чтобы выполнялось $\mathcal{M} < \mathcal{M}_{kp}$, т.е. неравенство $mgl\cos^2\alpha\sin^2\alpha < F_0 h$, откуда

$$\sin\alpha\cos\alpha < \sqrt{\frac{F_0 h}{mgl}} \quad \Rightarrow \quad \sin 2\alpha < \sqrt{\frac{4F_0 h}{mgl}} \quad \Rightarrow \quad \alpha < \frac{1}{2}\arcsin\sqrt{\frac{4F_0 h}{mgl}}.$$

Нам осталось лишь рассмотреть ситуацию, когда человек находится левее точки О. Очевидно, этот случай такой же: достаточно отсчитывать x от точки А, заменить в наших формулах $N_1 \leftrightarrow N_2$ и α на $(\pi/2 - \alpha)$. Очевидно, наше неравенство при этом не меняется, как не меняется и ответ.

Отметим, что искать решение неравенства можно через квадратное уравнение относительно $\sin^2\alpha$:

$$\sin^2\alpha(1 - \sin^2\alpha) < \frac{F_0 h}{mgl} \quad \Rightarrow \quad \sin^2\alpha < \frac{1 - \sqrt{1 - 4F_0 h/(mgl)}}{2}.$$

<u>Ответ</u>: Угол α (наименьший острый угол L-образной лестницы) не должен превосходить значение

$$\alpha < \frac{1}{2}\arcsin\sqrt{\frac{4F_0 h}{mgl}}.$$

Задача 2.

Обозначим: S – площадь поршня, V – объём под поршнем в данный момент, N – число молекул, вытекших из баллона к данному моменту, $n = N/V$ – концентрация газа под поршнем в данный момент. Также будем использовать k – постоянную Больцмана и N_a – постоянную Авогадро.

Первоначально температура в системе равна T_0. Давление поршня на газ постоянно и равно $p = mg/S$. С другой стороны, давление идеального газа подчиняется уравнению $p = nkT_0$. Газ постепенно вытекает из баллона и число его молекул под поршнем N возрастает, но концентрация n при этом постоянна (за счёт того, что растёт V) и равна фиксированному значению

$$n_0 = \frac{p}{kT_0} = \frac{mg}{SkT_0}.$$

В первый раз предохранитель срабатывает, когда число молекул под поршнем становится равно первому пороговому значению N_1, при котором газ с найденной концентрацией n_0 заполнит всё хранилище объёма SH:

$$N_1 = n_0 SH = \frac{mgSH}{SkT} = \frac{mgH}{kT_0}.$$

Как только это произойдёт, температура в хранилище уменьшится до $T_0 - \Delta T$; но давление поршня p останется тем же, причём $p = nk(T_0 - \Delta T)$. Поэтому после остывания концентрация газа n, при которой поршень с ним в равновесии, станет равна новой фиксированной величине

$$n_1 = \frac{p}{k(T_0 - \Delta T)} = \frac{mg}{Sk(T_0 - \Delta T)} > n_0.$$

При срабатывании предохранителя поршень, очевидно, опустится.

По мере дальнейшего вытекания газа поршень снова станет подниматься. Предохранитель снова сработает, когда газ с новой концентрацией n_1 заполнит всё хранилище, а число молекул под поршнем окажется равным следующему пороговому значению N_2:

$$N_2 = n_1 SH = \frac{mgH}{k(T_0 - \Delta T)}.$$

Рассуждая аналогично, получим, что предохранитель срабатывает, когда число молекул газа под поршнем равно

$$\frac{mgH}{k(T_0 - z\Delta T)},$$

где z – целое число, показывающее, сколько раз сработал предохранитель.

В конце весь газ вытечет из баллона под поршень, то есть число молекул газа там окажется равным $\nu_0 N_a$. Это произойдёт после какого-то числа z срабатываний предохранителя:

$$\frac{mgH}{k(T_0 - (z-1)\Delta T)} \leq \nu_0 N_a \leq \frac{mgH}{k(T_0 - z\Delta T)}.$$

Переписывая двойное неравенство относительно z и учитывая, что $kN_a = R$, получим

$$\frac{T_0}{\Delta T} - \frac{mgH}{\nu_0 R \Delta T} \leq z \leq \frac{T_0}{\Delta T} - \frac{mgH}{\nu_0 R \Delta T} + 1.$$

Подставляя численные значения (универсальная газовая постоянная, как известно, равна $R = 8.31$), получим $182.07 \leq z \leq 183.07$ откуда делаем вывод, что предохранитель сработает 183 раза.

Конечная температура при этом окажется равной $T_k = 300 - 183 = 117$ К. Отсюда по уравнению Клапейрона-Менделеева выражается конечный объём системы и высота поршня в этот момент:

$$pV_k = \nu_0 R T_k \qquad \Rightarrow \qquad V_k = \frac{\nu_0 R T_k}{p} = \frac{S\nu_0 R T_k}{mg} \qquad \Rightarrow \qquad H_k = \frac{V_k}{S} = \frac{\nu_0 R T_k}{mg} \simeq 9.92 \text{ м}.$$

Ответ: предохранитель сработает 183 раза, поршень остановится на высоте 9.92 м

Задача 3.

Скорость всех бусинок при подлёте к земле будет практически одинакова (ведь их размерами можно пренебречь – все они падали примерно с одной высоты). Обозначим эту скорость V. Будем нумеровать бусинки снизу вверх.

Сначала о землю ударится самая нижняя (первая) бусинка; отскочив упруго от земли со скоростью V, она стукнет вторую (которая в этот момент ещё летит вниз со скоростью V), та – третью и т.д.

Так как удары абсолютно упругие, бусинки будут обмениваться энергией и импульсом. Соответствующие уравнения включают в себя массы этих бусинок, которые по условию не даны.

Нам нужно, чтобы в результате удара верхняя бусинка получила максимальную скорость. Рассмотрим соударения первой и второй бусинки (см. рис. а). Понятно, что вторая бусинка получит большую скорость, если она лёгкая, а бьющая по ней снизу – тяжёлая. Если вторая бусинка бесконечно более лёгкая *по сравнению с первой*, она отскочит от неё по законам сохранения энергии и импульса, словно ударившись о движущуюся стенку, то есть будет иметь скорость $3V$. Это легко определить в системе отсчёта (СО) первой бусинки (см. рис. б): в ней вторая бусинка налетает на первую (неподвижную в этой СО) со скоростью $2V$ и с такой же скоростью отскакивает (скорость упругого отскока от неподвижной тяжёлой стенки хорошо известна даже без выписывания законов сохранения). Вернувшись в неподвижную систему отсчёта (см. рис. в) обнаружим, что вторая бусинка полетела в этой СО вверх со скоростью $3V$.

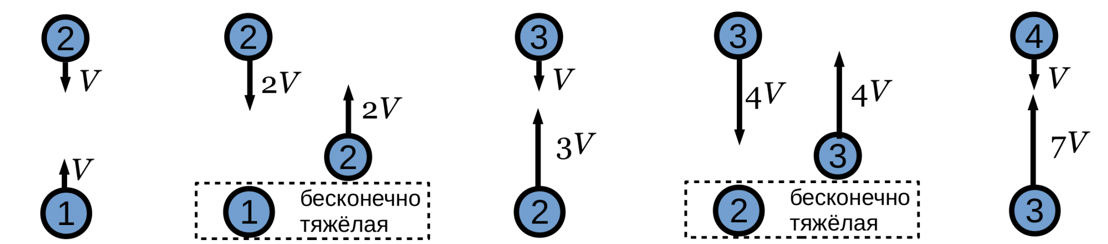


Рис. а: СО земли, до удара | Рис. б: СО 1й бусинки, удар | Рис. в: обратно в СО земли | Рис. г: СО 2й бусинки, удар | Рис. д: обратно в СО земли

Разумеется, этот же результат можно получить, выбрав бусинки произвольной массы, записав ЗСЭ и ЗСИ и убедившись, что при любом соотношении масс скорость отскока не превосходит $3V$.

На рисунке в вторая бусинка, летящая вверх, наталкивается на третью и бьёт по ней снизу. Понятно, что третья полетит вверх с максимально большой скоростью, если она (третья бусинка) бесконечно более лёгкая по сравнению со второй. Тогда она снова отскочит от нижней (второй) бусинки как от подвижной стенки и будет иметь при этом скорость (см. рис. г,д) $7V$.

Продолжая рассматривать соударения бусинок, таких, что каждая последующая бусинка гораздо легче предыдущей, мы получим, что n-тая будет после отскока иметь скорость $(2^n - 1)V$. Этот факт можно доказать строго, например, по индукции.

Так как у Илона Маска самая верхняя бусинка отлетела со скоростью

$$512 - 1 < 800 < 1024 - 1 \qquad \text{или} \qquad 2^9 - 1 < 800 < 2^{10} - 1,$$

то число бусинок должно было быть не менее 10.

Заметим, что даже Илон Маск не может брать бусинки, массы которых отличаются *в бесконечное число* раз. Однако, это ему и не требуется, ведь с десятью бусинками ему нужно добиться увеличения скорости не в 1023, а только в 800 раз. В предположении (отнюдь не самом выгодном!), что соседние бусинки отличаются в одинаковое число раз, можно найти необходимое отношение масс соседних бусинок, а также прикинуть, во сколько раз самая тяжелая бусинка тяжелее самой легкой. Это самостоятельное упражнение позволит вам впечатлиться стоимостью эксперимента вместе с Илоном Маском.

Также отметим, что для достижения космических высот в условии задачи достаточно сбрасывать бусинки с высоты всего 10 метров. Такой интуитивно неочевидный ответ связан с тем, что при столкновении бусинок происходит *кумулятивное* накопление импульса у самой верхней бусинки, который увеличивается в геометрической прогрессии с ростом числа бусинок.

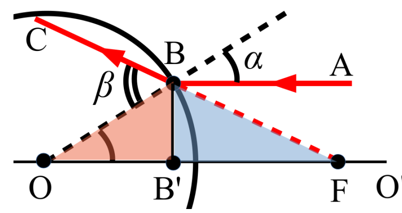
<u>Ответ</u>: 10 бусинок в пренебрежении стоимостью эксперимента.

Задача 4.

Сначала разберёмся, почему Седрику пришлось использовать оптическое заклинание.

Голова Седрика находится внутри воздушного пузыря, свет к нему поступает от предметов, находящихся снаружи, в области, где имеется вода с некоторым коэффициентом преломления n. Рассмотрев параллельный пучок лучей, входящих в пузырь, можно убедиться, что сферическая поверхность пузыря «работает» как рассеивающая линза с фокусным расстоянием $f = R/(n-1)$.

Рис. 2:



Действительно, рассмотрим луч ABC, попадающий на сферическую поверхность параллельно некоей оси OO$'$. Докажем, что если BC продлить до точки F, то построенная точка F обладает свойством фокуса: все лучи, параллельные OO$'$, после преломления идут, словно выйдя по прямой из F. Как и для обычных линз это утверждение справедливо только для узкого пучка света, не слишком сильно удалённого от OO$'$ (приближение *параксиальных лучей* – расстояние BB$'$ мало). Величина отрезка B$'$F выполняет роль фокусного расстояния $|f|$ этой рассеивающей линзы.

Пусть луч попал на сферу радиуса R под произвольным углом α. Этот угол мал, так как BB$'$ мало. По закону Снеллиуса $n \sin\alpha = \sin\beta$, где углы α и β отсчитываются от радиуса OB. В приближении параксиальных лучей это равенство можно записать в виде

$$\sin\alpha \simeq \alpha, \qquad \sin\beta \simeq \beta \qquad \Rightarrow \qquad n\alpha = \beta.$$

Из треугольника OBB$'$ отрезок BB$'$$= R\sin\alpha \simeq R\alpha$. Аналогично, из треугольника же BB$'$F отрезок BB$'$=B$'$F$\mathrm{tg}(\beta-\alpha) \simeq |f|(\beta-\alpha)$. Используем $\beta - \alpha = (n-1)\alpha$, получим

$$\mathrm{BB}' = R\alpha = |f|(n-1)\alpha, \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{B'F} = |f| = R/(n-1) = 1/|D|. \tag{1}$$

Так как положение точки F не зависит от значения α, действительно оказалось, что все лучи с произвольными α можно продлить именно в точку F. Теперь нам известно фокусное расстояние $|f|$ соответствующей рассеивающей линзы и её оптическая сила $|D|$ как функция радиуса пузыря R.

Чтобы скомпенсировать получившуюся на поверхности пузыря рассеивающую линзу, Седрику приходится располагать на её поверхности собирающую линзу той же оптической силы, чтобы видеть отчётливо.

Когда Седрик ныряет, радиус пузыря вокруг его головы меняется, а вместе с ним меняется и оптическая сила линзы. Так как количество вещества газа и его температура в пузыре постоянны, произведение давления газа в пузыре на его объём одинаковы.

Обозначим объём газа в пузыре V в ситуации, когда Седрик плавал у поверхности. По условию объем его головы равен $V/3$ – в три раза меньше объёма газа у поверхности. На глубине 10 метров давление увеличилось по сравнению с давлением на поверхности на одну атмосферу, поэтому объем газа здесь равен $V/2$. Вместе с головой объём пузыря составит (R_1 – радиус пузыря на глубине H)

$$\frac{V}{2} + \frac{V}{3} = \frac{4\pi R_1^3}{3}. \tag{2}$$

Аналогично, на глубине $2H$ давление воды составит три атмосферы, а значит газ сожмётся до объёма $V/3$, а радиус пузыря R_2 будет задаваться соотношением

$$\frac{V}{3} + \frac{V}{3} = \frac{4\pi R_2^3}{3}. \tag{3}$$

Разделив (2) на (3), найдём, во сколько раз меняется радиус пузыря, когда Седрик погрузился с глубины H на глубину $2H$:

$$R_1^3/R_2^3 = 5/4.$$

Согласно (1) $|D| \sim R^{-1}$, поэтому искомая оптическая сила D' на глубине $2H$

$$\frac{D}{D'} = \frac{R_2}{R_1} \qquad \Rightarrow \qquad D' = D\frac{R_1}{R_2} = 1.3\sqrt[3]{\frac{5}{4}} \simeq 1.4$$

<u>Ответ</u>: Линза с оптической силой 1.4 диоптрии.

Задача 5.

Будем постепенно увеличивать напряжение U, поданное на схему. Для определённости будем считать, что на левой клемме схемы потенциал U, а правая заземлена – так будет удобнее отмечать на рисунках разность потенциалов на каждом элементе.

Пока $U < U_1 = 1$ В, все диоды в схеме закрыты, ток равен нулю.

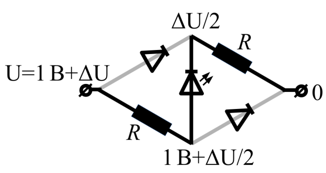


Рис. 3:

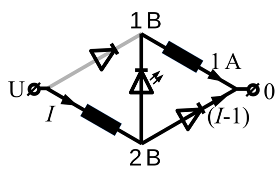


Рис. 4:

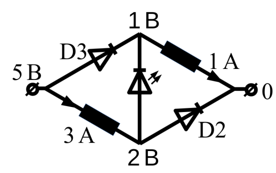


Рис. 5:

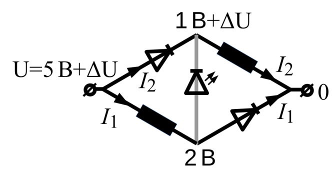


Рис. 6:

При $U = U_1$ открывается D1. Введём параметр $\Delta U > 0$, такой что $U = U_1 + \Delta U = 1 + \Delta U$: он показывает, насколько напряжение в цепи превышает то, при котором в схеме установился режим с одним открытым диодом.

С увеличением поданного напряжения в цепи устанавливаются потенциалы (см. рис. 3) так, чтобы на каждом сопротивлении падало напряжение $\Delta U/2$ (при этом падение напряжения на D1 как раз составит $U_1 = 1$ В). Ток в цепи в этом режиме $I = \Delta U/2R = (U-1)/2$ (в последнем равенстве мы учли $R = 1$ Ом).

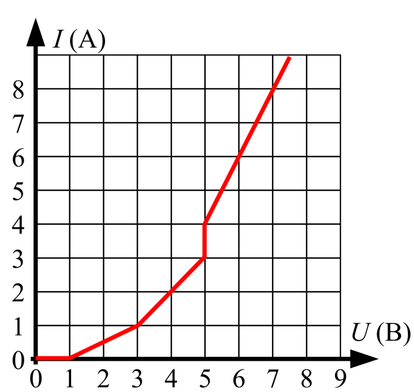
Этот режим продолжается, пока не откроется следующий диод. Так как открыть диод D2 проще (нужно только 2 В), он откроется следующим. Из потенциалов на рис. 3 видно, что это произойдёт, когда разность потенциалов на нём $(1 + \Delta U/2)$ сравняется с $U_2 = 2$ В, то есть при $\Delta U = 2$ В, $U = 3$ В.

Таким образом $I = 0$ при $U < 1$ В, $I(U) = (U-1)/2$ при $U \in (1, 3)$.

Далее открывается диод D2, потенциалы в узлах схемы в этом режиме изображены на рис. 4 (из соображений, что на D1 и D2 должно падать 1 и 2 вольта соответственно). Ток через левое сопротивление равен $I = (U-2)/R = U-2$ и совпадает с полным током схемы, ток через правое сопротивление R перестаёт меняться и равен 1 А.

Этот режим продолжается, пока не откроется D3, то есть до момента, когда $U - 1 = U_3 = 4$ В или $U = 5$ В. Итак, мы установили, что $I = U - 2$ при $U \in (3, 5)$. Распределение потенциалов в схеме в этот момент представлено на рис. 5. Полный ток в схеме в этот момент составляет 3 А (диод D3 открылся, но ток через него ещё не течёт, ток через диод D2 равен 2 А).

Рис. 7:



Что же произойдёт при больших напряжениях? Снова представим напряжение U в виде $U = 5 + \Delta U$ (параметр $\Delta U > 0$ показывает, насколько напряжение в цепи больше порогового значения 5 В, при котором начался этот режим). Распределение потенциалов установим, зная что на D2 и D3 падает 2 и 4 вольта. Из рис. 6 видно, что светодиод в этой ситуации закроется, ведь напряжение на нём оказывается менее 1 вольта. Ток, текущий через левое сопротивление $I_1 = (3 + \Delta U)/R$ потечёт и через D2, а ток, текущий через правое сопротивление $I_2 = (1 + \Delta U)/R$, потечёт и через D3. Вместе они составят полный ток в цепи в этом режиме $I = I_1 + I_2 = (4 + 2\Delta U)/R$. Видно, что при сколь угодно малом ΔU ток в цепи будет более 4 А. То есть в цепи в момент включения этого режима происходит скачок тока.

Дальнейшее значение тока в цепи при повышении U соответствует этому режиму и может быть записано в виде $I = 2U - 6$.

Ответ: Результирующий график $I(U)$ представлен на рис. 7. Светодиод горит при напряжении схемы от 1 до 5 В.