Возможные решения задач. 9 класс

Задача 1. Бусины

Поскольку при абсолютно упругом ударе бусины обмениваются скоростями, а размерами бусин можно пренебречь, то при рассмотрении всей системы целиком (не различая бусины) можно считать, что они проходят друг сквозь друга не взаимодействуя. Тогда движение каждой такой псевдобусины не зависит от остальных псевдобусин и представляет собой колебания (падение, отскок, подъём, остановка и т.д.) с периодом

$$T = T_{\text{падение}} + T_{\text{подъём}} = 2T_{\text{падение}} = 2\sqrt{\frac{2h_0}{g}}$$

где h_0 — исходная высота бусины, g — ускорение свободного падения. Поскольку исходные высоты бусин относятся как $1:4:16$, то периоды колебаний псевдобусин относятся как корни высот, т.е. $1:2:4$. Тогда несложно построить график движения псевдобусин (рис. 1).

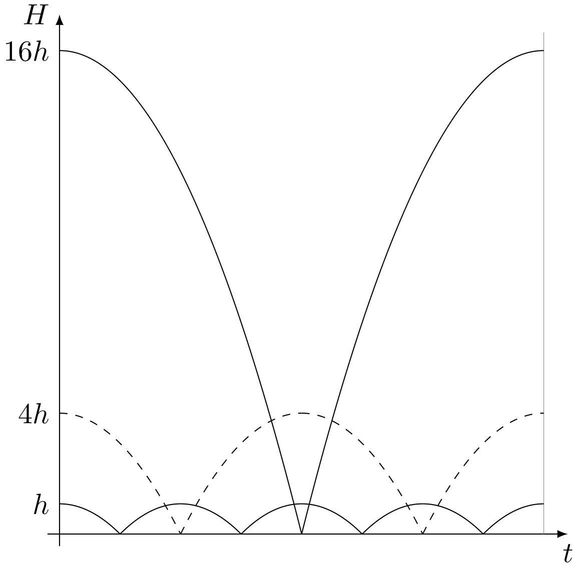


Рис. 1: Движение псевдобусин

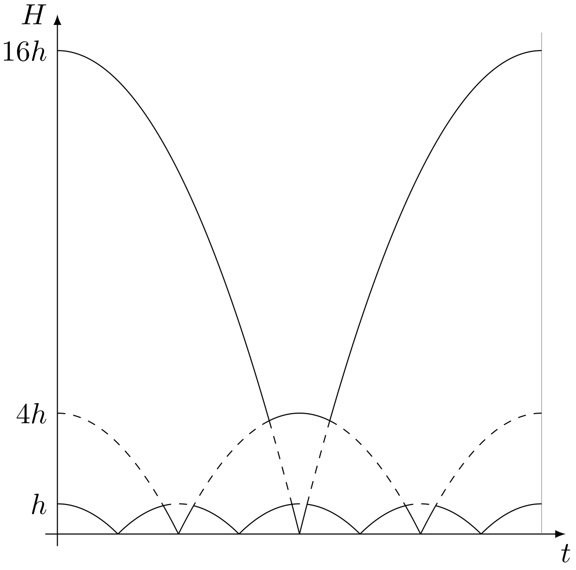


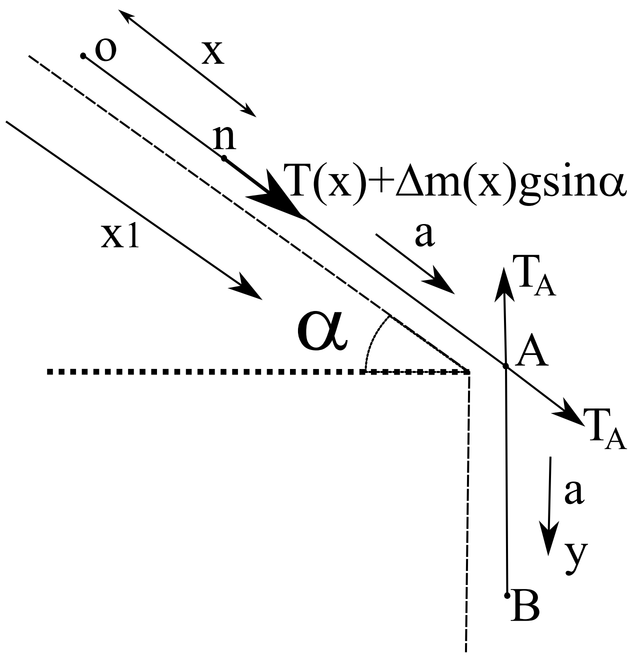
Рис. 2: Движение бусин

Настоящие бусины отличаются от псевдобусин тем, что не меняют своего порядка на спице. Перестроим рис. 1 в согласии с этим условием и получим рис. 2. Количество столкновений теперь находится подсчётом по графику. Верхняя и средняя бусины столкнулись 2 раза, средняя и нижняя — 6 раз, нижняя и пол — 7 раз. Всего 15 столкновений.

Ответ: 15 столкновений.

Задача 2. Верёвка

Проведем качественный разбор задачи: вертикальная часть веревки сама по себе (не связанная с наклонной) двигалась бы с ускорением g, в то время как наклонная — с меньшим ускорением $g\sin\alpha$. Таким образом, между ними должна возникать сила, которая будет "разгонять" наклонную и "притормаживать" вертикальную части. Этой силой и служит сила натяжения нити в точке A: на рисунке отмечены силы, равные по модулю T_A, действующие на вертикальную и наклонную части веревки. Отметим, они не направлены противоположно, как можно было бы ожидать из третьего закона Ньютона: оставим этом маленький парадокс читателю для размышления.



Для ответа на вопрос задачи о максимальной силе натяжения, теперь следует рассмотреть силу натяжения в отдельных точках нити. Рассмотрим отрезок on на наклонной части веревки (см. рис.) длины x и силы, действующие на него вдоль оси $\vec{x}_1$. Этими силами будут проекция силы тяжести на ось $\vec{x}_1$ и сила натяжения, действующая со стороны остальной части нити. Если обозначить массу этой части, как $\Delta m(x)$ то можно записать второй закон Ньютона в проекции на ось $\vec{x}_1$ в виде:

$$\Delta m(x)a = T(x) + \Delta m(x)g\sin\alpha \text{ , или } T(x) = \Delta m(x)(a - g\sin\alpha) \text{ ,} \tag{1}$$

где a это ускорение нити в целом, а $T(x)$ это сила натяжения в точке n. Отметим, что $a > g\sin\alpha$, что следует из сказанного выше. Видно, что по мере роста x (и Δm), сила натяжения веревки растет, и достигает максимума в точке A. Написав аналогичное выражения для вертикальной части веревки (и отметив, что $a < g$), несложно показать, что при движении от точки A к нижней части веревки (точка B) сила натяжения веревки будет убывать. Таким образом, максимальное значение силы натяжения достигается в точке A.

Запишем второй закон Ньютона для отрезка oA в проекции на ось $\vec{x}_1$, а также для отрезка веревки AB в проекции на ось $\vec{y}$ (см. рис.). Отметим при этом, что проекции ускорения на соответствующие оси равны a.

$$\frac{2}{3}ma = \frac{2}{3}mg\sin\alpha + T_A \tag{2}$$

$$\frac{1}{3}ma = \frac{1}{3}mg\sin\alpha - T_A \text{ .} \tag{3}$$

Решая эту систему уравнений относительно неизвестной величины T_A можно получить итоговый результат:

$$T_A = \frac{2}{9}mg(1 - \sin\alpha) \text{ .} \tag{4}$$

Ответ: максимальная сила натяжения достигается на краю наклонной плоскости и равна $(2/9)mg(1 - \sin\alpha)$.

Задача 3. Платформа

Поймём, как может обрушиться эта конструкция. Пока нет проскальзывания между стеной и концом платформы, эта конструкция является жёсткой (рис. 3). Значит, движение конструкции связано исключительно с проскальзыванием в точке A.

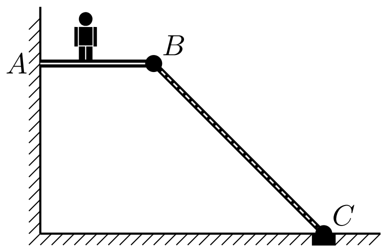


Рис. 3: Исходное положение

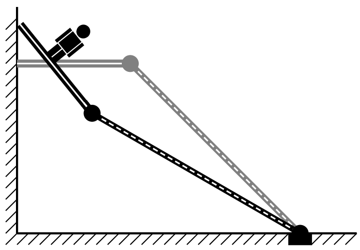


Рис. 4: Проскальзывание вверх

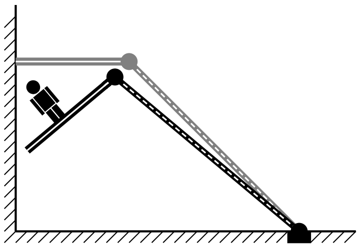
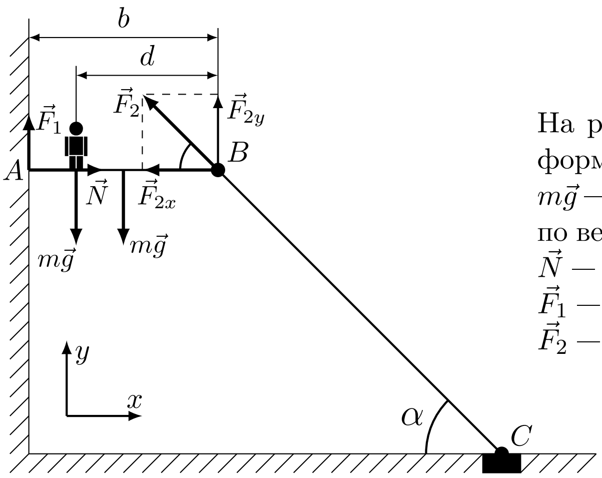


Рис. 5: Проскальзывание вниз

Чтобы понять, какой из вариантов проскальзывания (рис. 4 или 5) реализуется и при каком условии, запишем условия равновесия системы.



На рисунке слева указаны все силы, действующие на платформу, а именно:
$m\vec{g}$ — сила тяжести платформы и вес рабочего (они совпадают по величине),
$\vec{N}$ — сила реакции стены,
$\vec{F}_1$ — сила трения со стороны стены,
$\vec{F}_2$ — сила реакции шарнира (F_{2x} и F_{2y} — её компоненты).

Сила F_2 направлена вдоль лестницы BC, иначе противодействующая ей сила вращала бы лестницу относительно точки C, чего быть не должно. Значит,

$$F_{2y} = F_2 \sin\alpha = F_2 \sin 45^\circ = F_2 \cos 45^\circ = F_{2x} \tag{5}$$

Поскольку платформа находится в равновесии, сумма действующих на неё сил должна быть равна нулю:

$$\text{Ось } x : N = F_{2x} \tag{6}$$

$$\text{Ось } y : F_1 + F_{2y} = 2mg \tag{7}$$

$$(5) \Rightarrow F_1 + N = 2mg \tag{8}$$

Также, относительно любой точки должно выполняться правило рычага:

$$\text{Точка } A : mg(b-d) + mgb/2 = F_{2y}b = Nb \tag{9}$$

$$\text{Точка } B : mgd + mgb/2 = F_1 b \tag{10}$$

Из последнего соотношения следует, что $\vec{F}_1$ может быть направлена только вверх. Значит, если проскальзывание произойдёт, то левый край платформы будет двигаться вниз, т.е. реализуется только вариант, представленный на рис. 5. Сложение (9) и (10) приводит к (8), а вычитание даёт

$$mg(b-d) - mgd = Nb - F_1 b$$

$$1 - \frac{2d}{b} = \frac{N - F_1}{mg}$$

$$(8) \Rightarrow 1 - \frac{2d}{b} = 2\frac{N - F_1}{N + F_1}$$

$$\frac{d}{b} = \frac{3F_1 - N}{2(N + F_1)} = \frac{3}{2} - \frac{2}{1 + F_1/N} \tag{11}$$

Максимальному отношению F_1/N (оно равно $\mu = 0{,}6$, т.к. это сухое трение) соответствует максимальное отношение d/b:

$$\frac{d_{max}}{b} = \frac{3}{2} - \frac{2}{1+\mu} = \frac{3}{2} - \frac{2}{1{,}6} = 0{,}25 \tag{12}$$

Это и будет критическая точка. При $d > d_{max}$ силы трения будет нехватать для удержания платформы, и конструкция обрушится. При $d_{max} \geq d \geq 0$ сила трения $F_1 \leq \mu N$, и обрушение не произойдёт.

Ответ: рабочий может находиться на правой четверти платформы.

Задача 4. Лёд и соль

Вначале система была в тепловом равновесии с находящимся в ней льдом, значит начальная температура равна температуре замерзания соленой воды. По условию доля соли вначале составляет $w_0 = 3\%$, тогда используя формулу из условия найдем начальную температуры, как температуру замерзания соленой воды

$$T_{30} = -\alpha \cdot w_0 = -1{,}92^\circ\mathrm{C}.$$

После добавления 1 литра пресной воды к 1 литру соленой, массовая доля соли уменьшилась в два раза и стала равна $w_1 = 1{,}5\%$. Тогда температура замерзания для этой воды равна

$$T_{31} = -\alpha \cdot w_1 = T_{30}/2 = -0{,}96^\circ\mathrm{C}.$$

Теплоемкости соленой и пресной воды равны C_B, плотность их так же одинакова, значит и масса 1 литра равна $m_B = 1$ кг. Так как вода быстро перемешивается, то быстро установилась и новая температура воды T_1. Найдем эту температуру из уравнение теплового баланса для воды

$$C_B m_B(T_1 - 0^\circ\mathrm{C}) + C_B m_B(T_1 - T_{30}) = 0,$$

$$T_1 = T_{30}/2 = -0{,}96^\circ\mathrm{C} \Rightarrow T_1 = T_{31}$$

Получилось, что после перемешивания температура соленой воды увеличилась, но опять оказалась равной температуре ее замерзания T_{31}, потому что массовая доля соли уменьшилась.

Для наступления нового теплового равновесия температура льда должна подняться от T_{30} до новой температуры замерзания воды. Энергия на этот процесс будет получена за счет того, что на лед намерзнет немного воды. Тогда из уравнения теплового баланса получаем

$$C_\Lambda m_\Lambda(T_{31} - T_{30}) = \lambda \Delta m \Rightarrow \Delta m = 5{,}82\text{г}. \tag{13}$$

Возможно решить задачу и более точно, так как выше мы пренебрегли тем, что доля соли в воде меняется из-за намерзания воды. Действительно, удельная теплота плавления льда много больше его удельной теплоемкости, а значит намерзшая масса воды Δm будет мала по сравнению с его массой. В таком случае и изменением объема воды можно пренебречь и считать новую температуру замерзания равной T_{31}. Но если мы хотим учесть изменение температуры замерзания, то заметим, что так как лед пресный, а масса воды уменьшилась на Δm, то доля соли стала равна $w_2 = w_1 \cdot \frac{2\cdot m_B}{2\cdot m_B - \Delta m}$. Конечную температуру тогда легко найти, как температуру замерзания финального раствора соли

$$T_{32} = -\alpha \cdot w_2 = -\alpha \cdot w_1 \cdot \frac{2 \cdot m_B}{2 \cdot m_B - \Delta m} = T_{31} \cdot \frac{2 \cdot m_B}{2 \cdot m_B - \Delta m}.$$

Осталось написать уравнение теплового баланса с учетом изменения температуры воды

$$C_B 2m_B\left(T_{32} - T_{31}\right) + C_\Lambda m_\Lambda\left(T_{32} - T_{30}\right) = \lambda \Delta m \tag{14}$$

$$C_B 2m_B\left(T_{31} \cdot \frac{2 \cdot m_B}{2 \cdot m_B - \Delta m} - T_{31}\right) + C_\Lambda m_\Lambda\left(T_{31} \cdot \frac{2 \cdot m_B}{2 \cdot m_B - \Delta m} - 2T_{31}\right) = \lambda \Delta m,$$

подставив сюда числа и умножив на знаменатель получим квадратное уравнение

$$165\Delta m^2 - 335{,}95\Delta m + 1{,}92 = 0.$$

Один из корней данного уравнения дает $\Delta m = 2{,}03$ кг, что заведомо неверно, а второй дает правильный ответ $\Delta m = 5{,}73$ г. Видно, что данный ответ слабо отличается от полученного в более простом решении, и в действительности, в пределах погрешностей приборов и используемых в решении констант они совпадают.

Ответ: Масса льда увеличится на ~ 6 граммов.

Задача 5. Квадраты

Идея данного решения заключается в том, чтобы сначала разобраться с отдельными квадратами, затем приложить ко всей целиком некоторое напряжение и определить распределение токов, не решая схему целиком. Из тока и напряжения легко выразить сопротивление.

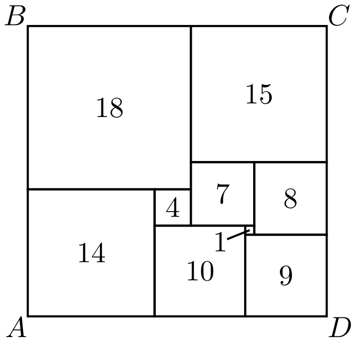


Рис. 6: Стороны указаны в сантиметрах

Сперва восстановим стороны всех квадратов, на которые были разрезаны пластины. Весь процесс здесь изложен не будет ввиду его тривиальности. Результат представлен на рис. 6.

Пусть пластина имеет толщину d, а её удельное сопротивление ρ. Рассмотрим квадрат со стороной a. Его сопротивление между двумя противолежащими сторонами можно найти по формуле сопротивления проводника длины l с площадью поперечного сечения S:

$$r = \frac{\rho l}{S} = \frac{\rho a}{ad} = \frac{\rho}{d}$$

т.е. сопротивление квадрата не зависит от его стороны.

Теперь рассмотрим всю схему целиком (например, схему Глюка). Приложим сопротивление U к контактам. Обозначим полный ток в системе как I, ток через квадрат со стороной a см как I_a, а падение напряжения на нём — U_a (см. рис. 7).

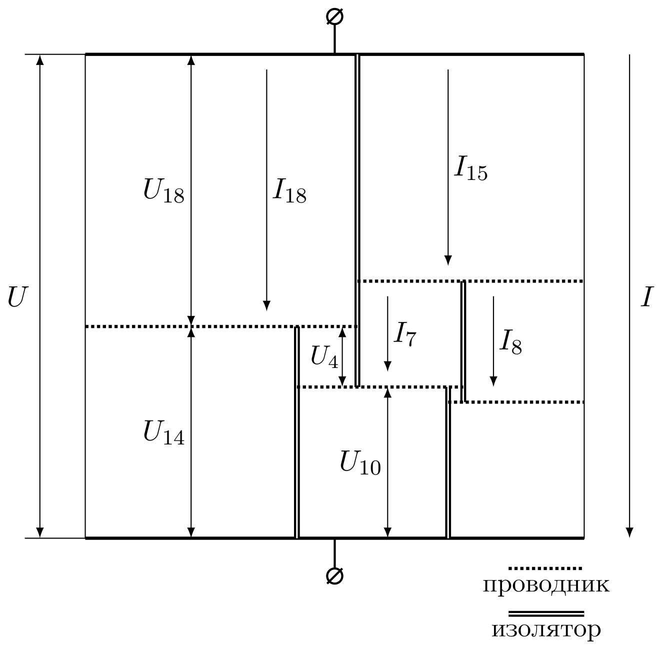


Рис. 7: Схема Глюка

Какие условия связывают токи и напряжения в этой схеме? Во-первых, суммарный ток через любое горизонтальное сечение пластины должен быть равен I. Например:

$$I_{18} + I_{15} = I \tag{15}$$

$$I_{18} + I_7 + I_8 = I \tag{16}$$

$$I_{14} + I_4 + I_7 + I_8 = I \quad \text{и т.д.} \tag{17}$$

Несложно заметить, что это условие эквивалентно первому правилу Кирхгофа. Во-вторых, суммарное падение напряжения по любой вертикальной линии от верхнего края пластины до нижнего должно быть равно U. Например:

$$U_{18} + U_{14} = U$$

$$U_{18} + U_4 + U_{10} = U$$

$$U_{15} + U_7 + U_{10} = U \quad \text{и т.д.}$$

Это условие, в свою очередь, эквивалентно второму правилу Кирхгофа. Перепишем условия на напряжения, используя закон Ома для квадрата: $U_a = I_a r$.

$$I_{18} + I_{14} = U/r \tag{18}$$
$$I_{18} + I_4 + I_{10} = U/r \tag{19}$$
$$I_{15} + I_7 + I_{10} = U/r \ \text{ и т.д.} \tag{20}$$

При внимательном взгляде на индексы в соотношениях (15-20) можно заметить, что распределение токов, при котором сила тока через квадрат пропорциональна индексу (длине стороны квадрата), удовлетворяет всем условиям. Ясно, что это решение единственно. Тогда можем выразить сопротивление всей схемы Глюка:

$$R_\Gamma = \frac{U}{I} = \frac{U/r}{I} r = \frac{I_{18} + I_{14}}{I_{18} + I_{15}} r = \frac{18I_1 + 14I_1}{18I_1 + 15I_1} r = \frac{32}{33} r = \frac{AB}{BC} r$$

Для схемы Бага аналогичные рассуждения дадут:

$$R_{\text{Б}} = \frac{BC}{AB} r$$

Найдём их отношение:

$$\frac{R_\Gamma}{R_{\text{Б}}} = \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 = \left(\frac{32}{33}\right)^2 = \frac{1024}{1089}$$

Ответ: отношение сопротивления схемы Глюка к сопротивлению схемы Бага равно $\left(\frac{32}{33}\right)^2 = \frac{1024}{1089}$.