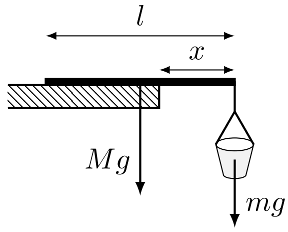
Возможные решения задач. 8 класс

Задача 1. Коромысло



Сперва найдём массу стержня M. Для этого запишем правило рычага относительно края стола для случая, когда стержень выдвинут на $x_1 = 30$ см:

$$Mg \cdot (l/2 - x_1) = mgx_1 \Rightarrow M = m \cdot \frac{x_1}{l/2 - x_1} = 3 \text{ кг}. \tag{1}$$

Теперь из этого же уравнения найдём массу, которую можно уравновесить, если стержень выдвинут на $x_2 = 10$ см.

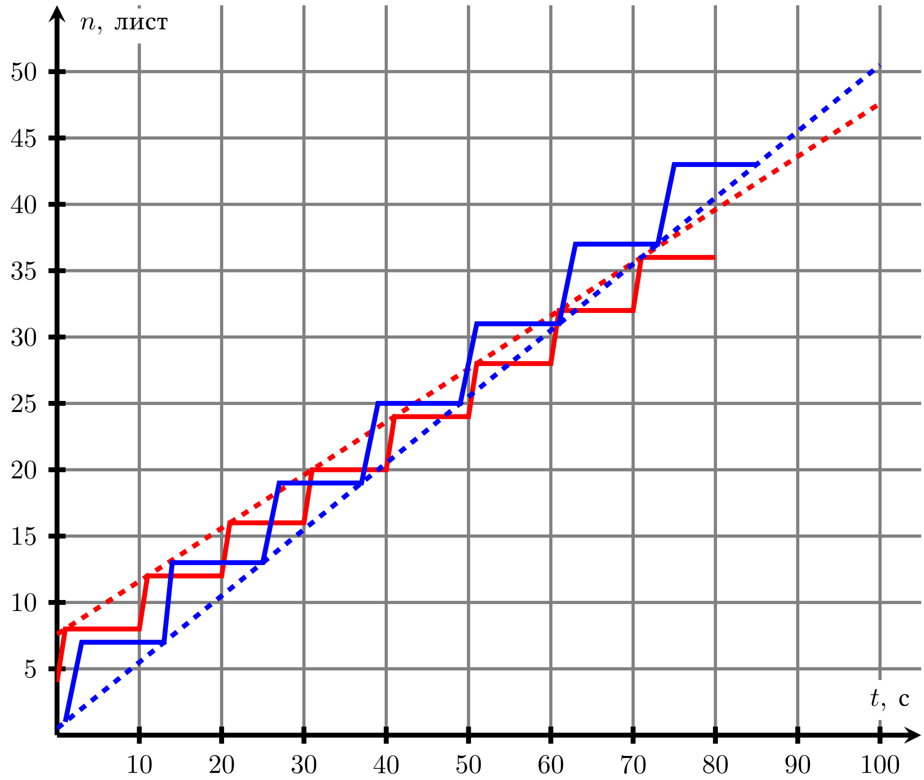
$$Mg \cdot (l/2 - x_2) = mgx_2 \Rightarrow m = M \cdot \left(\frac{l}{2x_2} - 1\right) = 15 \text{ кг}, \tag{2}$$

однако в условии сказано, что ведро имеет объём в девять литров, значит максимальная масса равна 9 кг.

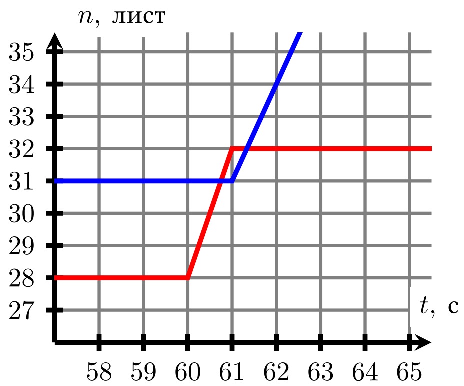
<u>**Ответ:**</u> если стержень будет выдвинут на 10 см, удастся уравновесить 9 кг

Задача 2. Лягушатники

Построим график зависимости положения лягушек от времени, считая, что в начальный момент времени Пьер (красный) находится на листе с номером 4, а Анри (синий) на листе с номером 1. Также проведём на этом графике две прямые. Одну через точки начала прыжков Пьера (он всегда будет находиться «ниже» этой прямой), а другую через точки окончания прыжков Анри (он всегда будет находится «выше» этой прямой).



Заметим, что раз график Пьера всегда находится ниже красной прямой, а график Анри выше синей, после 80 с встреч больше не будет, то есть исследовать надо только участок времени до 80 с. Видно, что последнее пересечение траекторий на отрезке 0 — 80 с произошло в промежутке 60 — 62 с. Нарисуем этот участок в большем масштабе:



Видно, что последняя встреча лягушек произойдёт через 61,3 с после начала движения Пьера.

Ответ: через 61,3 с после начала движения Пьера.

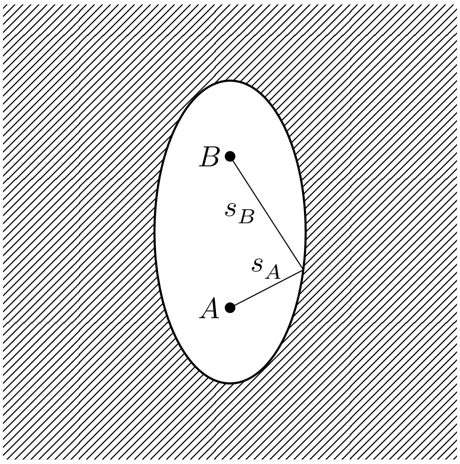
Задача 3. Трактор

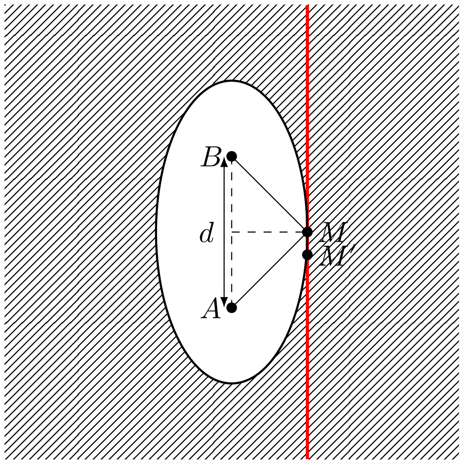
За время движения из точки A в точку B величина перемещения трактора равна длине отрезка AB. Обозначим ее за d. При этом известно, что путь должен быть больше в определённое число раз, то есть $s = \frac{5}{3}d$. Заметим, что тогда водитель не мог оказаться в таких точках, сумма расстояний от которых до A и B больше чем s

$$s_A + s_B \geqslant s. \tag{3}$$

И наоборот, в силу неопределённости его траектории, она могла проходить через любую точку, не принадлежащую вышеуказанной области.

Тогда, чтобы столкновения не произошло, прямая, по которой движется поток машин должна полностью лежать в «запрещённой» для трактора зоне, а для того, чтобы расстояние до отрезка было минимальным, она должна касаться границы, которая задаётся условием $s_A + s_B = s$. Раз прямая должна касаться границы, давайте докажем, что точка касания должна быть равноудалена от A и B. Для этого нужно показать, что эта точка будет наиболее удалена от отрезка AB.





Сдвинем точку M на Δx вниз. При этом сумма расстояний до точек A и B будет равна

$$s' = s'_A + s'_B = \sqrt{\left(\frac{d}{2} + \Delta x\right)^2 + L^2} + \sqrt{\left(\frac{d}{2} - \Delta x\right)^2 + L^2}. \tag{4}$$

Убедимся, что расстояние увеличилось, возведя s' в квадрат

$$s'^2 = 2 \cdot \left(\left(\frac{d}{2}\right)^2 + L^2\right) + 2(\Delta x)^2 + 2s'_A s'_B \tag{5}$$

Первое слагаемое представляет из себя ни что иное, как s^2, а остальные положительные, то есть $s' > s$. Значит точка M' лежит в «запрещённой» зоне.

Таким образом надо найти только расстояние от M до отрезка AB. Это можно сделать по теореме Пифагора

$$L^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{25}{9} - 1\right) \Rightarrow L = \frac{d}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}d = 0{,}66 \text{ км} \tag{6}$$

<u>Ответ:</u> Трактор гарантированно не мог добраться до дороги, если $L \geqslant \frac{2}{3}d = 0{,}66$ км.

Задача 4. Тюлень

Первым делом заметим, что давление в конце наблюдения равно атмосферному, значит тюлень вынырнул на поверхность и перемещение по вертикали равно нулю. Таким образом необходимо следить только за горизонтальным перемещением.

Давление жидкости на глубине h равно $\rho g h$, поэтому изменение давления за единицу времени с точностью до ρg равно вертикальной скорости тюленя, а именно

$$v_{\text{верт}} = \frac{\Delta P}{\Delta t} \cdot \frac{1}{\rho g}. \tag{7}$$

Таким образом можно пересчитать зависимость $P(t)$ в зависимость $v_{\text{верт}}(t)$, разбив график на линейные участки.

На участке $0 - 14$ с изменение давления равно 110 кПа, то есть скорость равна

$$v_{\text{верт}} = \frac{110000 \text{ Па}}{16 \text{ с} \cdot 1000 \text{ кг/м}^3 \cdot 10 \text{ м/с}^2} = 1{,}5 \text{ м/с}, \tag{8}$$

а значит тюлень плыл вертикально вниз. На участках $14 - 30$ с и $60 - 85$ с давление постоянно, поэтому вертикальная скорость равна 0. Изменения давления на участках $30 - 60$ с и $85 - 100$ с равны 70 кПа и 140 кПа соответственно.

В условии сказано, что полная скорость тюленя всегда была равна $1{,}5$ м/с, поэтому зная изменение давления и его связь с вертикальной составляющей скорости тюленя, можно найти горизонтальную составляющую скорости из теоремы Пифагора. Таким образом перемещение тюленя по горизонтали равно:

$$\begin{aligned} S =& (30-14) \text{ с} \cdot 1{,}5 \text{ м/с} + (60-30) \text{ с} \cdot \sqrt{(1{,}5 \text{ м/с})^2 - \left(\frac{70000 \text{ Па}}{(60-30) \text{ с} \cdot 1000 \text{ кг/м}^3 \cdot 10 \text{ м/с}^2}\right)^2} + \\ &+ (85-60) \text{ с} \cdot 1{,}5 \text{ м/с} + (100-85) \text{ с} \cdot \sqrt{(1{,}5 \text{ м/с})^2 - \left(\frac{140000 \text{ Па}}{(100-85) \text{ с} \cdot 1000 \text{ кг/м}^3 \cdot 10 \text{ м/с}^2}\right)^2} \approx 123 \text{ м} \end{aligned} \tag{9}$$

Ответ: перемещение тюленя равно 123 м

Задача 5. Желоб

Посчитаем сперва, чему равна вертикальная составляющая силы давления воды на стенку. Физически она соответствует силе тяжести воды, которая находится над стенкой в левой половине жёлоба. Посчитаем объём этой воды. Пусть жёлоб имеет длину l, тогда масса воды равна:

$$m = \rho \cdot \left(\frac{1}{4}\pi r^2 + hr\right) \cdot l, \tag{10}$$

а значит вертикальная составляющая силы давления воды:

$$F_{\downarrow} = \rho g \cdot \left(\frac{1}{4}\pi r^2 + hr\right) \cdot l. \tag{11}$$

Чтобы посчитать горизонтальную составляющую, разделим мысленно желоб на две части вертикальной плоскостью. Заметим, что раз сумма всех сил, которые действуют на левую половину воды равна нулю, горизонтальная сила давления на стенку равна горизонтальной силе давления на мысленно добавленную нами плоскость. Поэтому вместо того, чтобы считать силу, действующую на поверхность сложной формы, можно посчитать силу, действующую на вертикальную стенку высоты h. Давление с высотой растёт линейно, поэтому вместо «честного» расчёта можно заменить давление на среднюю величину $p_{\text{ср}} = \rho g(h+r)/2$, которая соответствует величине давления посередине стенки. Значит горизонтальная составляющая силы равна:

$$F_{\rightarrow} = p_{\text{ср}} \cdot S = \frac{\rho g(h+r)}{2} \cdot (h+r) \cdot l. \tag{12}$$

Осталось только найти высоту, при которой силы равны:

$$\frac{\rho g(h+r)^2}{2} \cdot l = \rho g \cdot \left(\frac{1}{4}\pi r^2 + hr\right) \cdot l, \tag{13}$$

сократив обе части уравнения на $\rho g l$, получим

$$\frac{(h+r)^2}{2} = \frac{1}{4}\pi r^2 + hr \Rightarrow \frac{1}{2}(h^2 + 2hr + r^2) = \frac{1}{4}\pi r^2 + hr. \tag{14}$$

Из этого соотношения можно найти h:

$$h^2 = \frac{1}{2}(\pi - 2)r^2 \Rightarrow h = \sqrt{\frac{\pi - 2}{2}} \cdot r \tag{15}$$

Ответ: $h = \sqrt{\frac{\pi-2}{2}} \cdot r$

Задача 6. Шары

Поймём, что происходит с мячами, когда бассейн наполняется водой. Когда мячи всплывают, их верхний слой всегда выше уровня воды, а нижний слой — всегда ниже. Значит, с одной стороны, последний мяч не может быть убран раньше, чем вода достигнет бортика бассейна, а с другой стороны, не может быть убран позже. Следовательно, эти события происходят одновременно.

Будем рассматривать все мячи как единое пористое тело. Его объём равен

$$V_N = N \cdot \frac{\pi}{6} d^3 = 15943 \cdot \frac{\pi}{6} \cdot (6{,}6\ \text{см})^3 = 2{,}4\ \text{м}^3, \tag{16}$$

где N — количество мячей, а d — диаметр одного мяча. Важно понимать, что в этот объём не включена вода/воздух между мячами. Можем рассчитать плотность упаковки мячей (отношение их реального объёма к предоставленному им):

$$\alpha = \frac{V_N}{V_{\text{бас}}/2} = \frac{2{,}4\ \text{м}^3}{4\ \text{м}^3} = 0{,}6. \tag{17}$$

Плотность такого тела равна средней плотности одного мяча:

$$\rho = \frac{m_{\text{мяча}}}{V_{\text{мяча}}} = \frac{m_1}{\frac{\pi}{6} d^3} = \frac{60\ \text{г}}{150\ \text{см}^3} = 0{,}4\ \tfrac{\text{г}}{\text{см}^3}. \tag{18}$$

Это меньше, чем плотность воды ($1\,\tfrac{\text{г}}{\text{см}^3}$), значит тело действительно всплывёт. Найдём момент, когда сила Архимеда, действующая на мячи, станет равна силе тяжести (рис. 1):

$$F_{\text{Арх}} = V_{\text{погр.}} \rho_{\text{воды}} g \tag{19}$$

$$F_{\text{тяж}} = V_N \rho g \tag{20}$$

$$F_{\text{Арх}} = F_{\text{тяж}} \quad \Rightarrow \quad V_{\text{погр}} \rho_{\text{воды}} = V_N \rho. \tag{21}$$

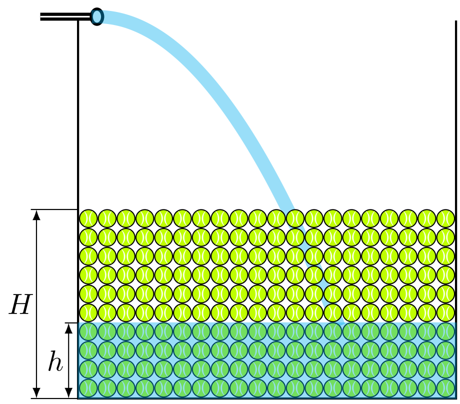


Рис. 1: Мячи начинают подъём

Значит в тот момент, когда шары начали всплывать отношение объёма погруженных $V_{\text{погр}}$ мячей к общему объёму мячей равно

$$\beta = \frac{V_{\text{погр}}}{V_N} = \frac{h}{H} = \frac{\rho}{\rho_{\text{воды}}} = 0{,}4. \tag{22}$$

Тогда можем рассчитать объём воды в момент, когда мячи начали подниматься:

$$V_1 = \frac{V_{\text{бас}}}{2} \beta (1 - \alpha) = \frac{8\ \text{м}^3}{2} \cdot 0{,}4 \cdot (1 - 0{,}6) = 0{,}64\ \text{м}^3. \tag{23}$$

По условию, такой объём воды поступил за 20 минут. Тогда полностью бассейн наполнится за

$$T = \frac{V}{V_1} \cdot 20\ \text{мин} = \frac{8\ \text{м}^3}{0{,}64\ \text{м}^3} \cdot 20\ \text{мин} = 250\ \text{мин}. \tag{24}$$

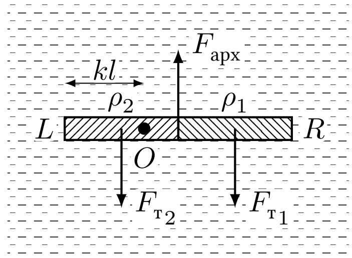
Значит, как было отмечено в начале, через столько времени и будет убран последний мяч.

Ответ: последний мяч будет убран через 4 часа 10 минут после включения воды.

Задача 7. Поплавок

Будем решать в некотором смысле обратную задачу, а именно для каждого угла найдём точку, в которой надо закрепить «поплавок», чтобы система находилась в равновесии. Случай произвольного угла может оказаться сложным, поэтому сперва разберёмся с $\alpha = 0$. То есть в какой точке O надо закрепить поплавок, чтобы равновесным было горизонтальное положение.

Пусть длина «поплавка» равна $2l$, а точка O находится на расстоянии $k \cdot l$ от левого края. Запишем правило рычага относительно этой точки, учитывая только силу тяжести и силу Архимеда (у силы, которая отвечает за закрепление «поплавка» нулевое плечо, так как она приложена в точке O):



$$F_{\text{т}_2} \cdot (kl - l/2) + F_{\text{арх}} \cdot (l - kl) = F_{\text{т}_1} \cdot (l/2 + l - kl). \tag{25}$$

Пусть объём поплавка равен $2V$, тогда правило рычага записывается в виде

$$\rho_2 V \cdot (kl - l/2) + 2Vg\rho_{\text{в}} \cdot (l - kl) = \rho_1 gV \cdot (l/2 + l - kl). \tag{26}$$

Сократив обе части уравнения на gVl, получим

$$\rho_2 \cdot (k - 1/2) + 2\rho_{\text{в}} \cdot (1 - k) = \rho_1 \cdot (1/2 + 1 - k). \tag{27}$$

Отсюда

$$k \cdot (\rho_1 + \rho_2 - 2\rho_{\text{в}}) = \frac{3\rho_1 + \rho_2}{2} - 2\rho_{\text{в}}, \tag{28}$$

значит

$$k = \frac{3\rho_1 + \rho_2 - 4\rho_{\text{в}}}{2 \cdot (\rho_1 + \rho_2 - 2\rho_{\text{в}})} = \frac{2700\ \text{кг/м}^3 + 800\ \text{кг/м}^3 - 4000\ \text{кг/м}^3}{2 \cdot (900\ \text{кг/м}^3 + 800\ \text{кг/м}^3 - 2000\ \text{кг/м}^3)} = \frac{5}{6}. \tag{29}$$

Теперь посмотрим на ситуацию, когда «поплавок» повернут на угол α к горизонтали. В таком случае все силы будут по-прежнему направлены по вертикали, а значит отношение их плеч останется неизменным. Таким образом, найденное нами положение точки закрепление отвечает равновесию для любого угла. Эта ситуация так называемого безразличного равновесия.

Что же будет если «поплавок» будет закреплён в другой точке? В таком случае равновесное положение — вертикальное, то есть угол равен $\pm 90^\circ$. Однако устойчиво то положение, в котором найденная точка O находится «выше» точки закрепления, значит искомый график имеет вид представленный на рисунке (по оси абсцисс отложено отношение расстояния от левого конца стержня до точки закрепления $\frac{LO}{LR}$, то есть $kl/2l = k/2$).