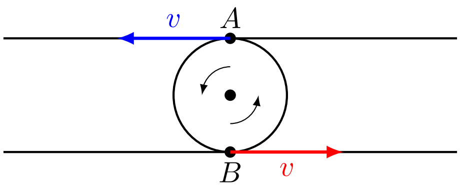
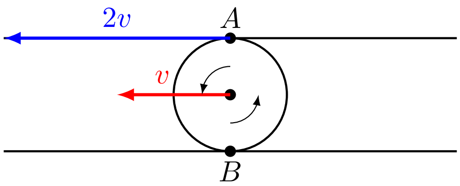
Возможные решения задач. 7 класс

Первый этап

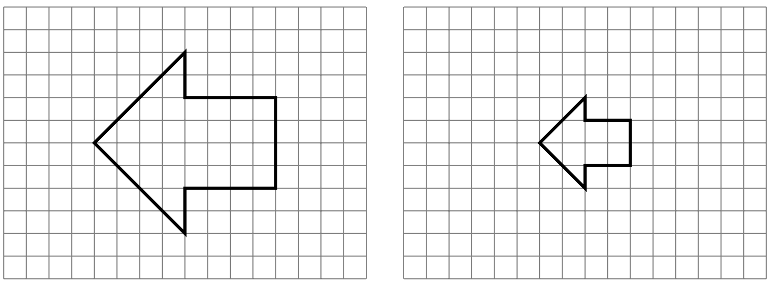
Задача 1. Шарик



Рассмотрим, как движется шарик, если верхнюю пластину сдвигают в одном направлении. Шарик в общем случае может совершать поступательное движение и вращение. Можно перейти в систему отсчета, связанную с центром этого шарика. В ней центр шарика покоится, а все его движение связано с вращением вокруг центра. Тогда можно заметить, что скорости точек, в которых шарик касается пластин равны по величине и направлены противоположно друг другу. А так как проскальзывания нет, пластины движутся так же, как точки касания в данный момент времени.



Тогда вернемся в систему отсчета, в которой нижняя пластина покоится. В ней нижняя точка шарика покоится, а центр шарика движется сонаправлено с верхней пластиной со скоростью v. Верхняя пластина движется в этот момент со скоростью $2v$. Значит можно сделать вывод о том, что скорость центра шарика всегда вдвое меньше скорости пластины, а значит вдвое меньше и все перемещения. Траектория шарика, в таком случае, будет иметь такую же форму, как траектория центра пластины, но длины всех линий будут уменьшены в два раза. Тогда с соблюдением масштаба она будет выглядеть так



Задача 2. Улитки на склоне

Для начала поймем, что оптимальным (с точки зрения затраченного времени) будет движение, при котором улитки оказываются на вершине одновременно. В противном случае первая из добравшихся улиток могла потратить больше времени, неся свой домик, тем самым сократив время пути второй улитки, и общее время было бы меньше.

Во вторых, заметим, что быстрой улитке невыгодно двигаться вверх без домика, так как потом ей придется дольше ждать медленную, которой придется этот участок пути пройти, неся домик.

Значит оптимальный путь для медленой улитки состоит из кусков, на которых она несет домик вверх сама и кусков, на которых она движется вверх без домика. Быстрая улитка может нести домик вверх, либо двигаться вниз без домика, чтобы помочь медленной.

Обозначим скорость медленной улитки v_1, а быстрой — v_2.

Пусть медленная улитка прошла путь S с домиком и $L-S$ без домика, где L — весь путь по вертикали, который улиткам нужно преодолеть. Тогда время, которое для этого потребовалось

$$t_1 = \frac{S}{v_1} + \frac{L-S}{2v_1}. \tag{1}$$

Движение быстрой улитки заключается в том, что ей нужно пронести один домик, спуститься за вторым, когда медленная улитка его оставит и пронести его, как минимум до высоты первого. Тогда суммарное время ее движения будет иметь вид

$$t_2 = \frac{L}{v_2} + \frac{L-S}{2v_2} + \frac{L-S}{v_2}. \tag{2}$$

Приравнивая времена $t_1 = t_2$ получаем уравнение, из которого можно найти S. После подстановки скоростей и домножения на $2v_2$ оно принимает вид

$$8S + 4L - 4S = 2L + L - S + 2L - 2S. \tag{3}$$

Его решение $S = \frac{L}{7}$.

Можем подставить найденое значение в t_1 и получить общее время пути, которое по построению является минимальным

$$t = \frac{L}{7v_1} + \frac{3L}{7v_1} = \frac{4L}{7v_1} \approx 216 \text{ ч}. \tag{4}$$

Ответ: 216 ч.

Задача 3. Голубая бездна

Первым делом заметим, что давление в конце наблюдения равно атмосферному, значит дельфин вынырнул на поверхность и перемещение по вертикали равно нулю. Таким образом необходимо следить только за горизонтальным перемещением.

Обозначим атмосферное давение p_A. Тогда давление жидкости на глубине h равно $\rho g h + p_A$, поэтому изменение давления за единицу времени с точностью до ρg равно вертикальной скорости тюленя

$$\Delta p = \rho g \Delta h = \rho g v \Delta t, \quad \text{или} \quad v = \frac{\Delta p}{\rho g \Delta t}. \tag{5}$$

Посчитаем из коэффициента наклона вертикальную составляющую в зависимости от времени.

Можно вычислить, что на участке $0 - 12$ с вертикальная составляющая скорости равна

$$\frac{\Delta p}{\rho g \Delta t} = \frac{240 \text{ кПа}}{10 \text{ м/с}^2 \cdot 1000 \text{ кг/м}^3 \cdot 12 \text{ с}} = 2 \text{ м/с}. \tag{6}$$

Она равна полной скорости дельфина, а это значит, что он дигался вертикально вниз. Нетрудно заметить, что такой же коэффициент наклона с точностью до знака имеют все наклонные участки. Значит вклад в перемещение дельфина вносят только горизонтальные участки графика, на которых он двигался строго горизонтально. Тогда нетрудно найти его перемещение

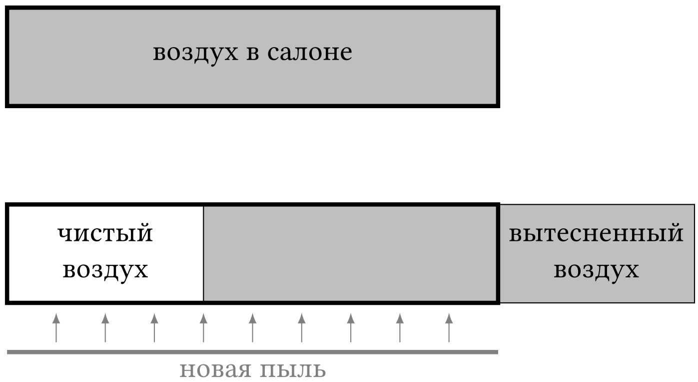
$$\Delta x = 2 \text{ м/с} \cdot (20 \text{ с} + 20 \text{ с} + 28 \text{ с}) = 136 \text{ м}. \tag{7}$$

Ответ: 136 м.

Задача 4. Непыльная

На рисунке схематически показано, что происходит с воздухом в салоне самолета за одну минуту:

- Поступает объем воздуха без пыли, равный U. В нижней части схемы этому объему соответствует левый кусок.
- Такой же объем U грязного воздуха выходит из салона самолета. Это следует из того, что количество воздуха в салоне сохраняется. Очевидно, что количество пылинок, которые покинули самолет, равняется $N_{out} = CU$. Кажется, что грязи должно стать меньше, но:
- в воздух поступает $N = N_P + N_F$ пылинок, где мы обозначили как N_P количество пылинок от людей, и N_F количество пылинок с полу.



Так как количество пылинок в салоне со временем не меняется (концентрация и объем салона постоянны), значит число поступающих и выходящих пылинок равно друг другу:

$$CU = N_{out} = N_P + N_F. \tag{8}$$

Если увеличить наддув воздуха кондиционером, то правая часть уравнения не изменится. Значит при увеличении U в два раза, концентрация уменьшится в два раза. Исходя из условия можно записать:

$$C - \frac{C}{2} = \Delta C_1 = 100\left(1/\text{см}^3\right) \text{ или } C = 200\left(1/\text{см}^3\right). \tag{9}$$

Рассмотрим далее второй случай: когда наддув остается неизменным, а количество пассажиров удваивается. Во-первых, величина N_P увеличится два раза. Во-вторых, концентрация увеличится от значения C до $C + \Delta C_2$, или в $\frac{3}{2}$ раза. Так же из условия следует, что N_F не измениться. Этих данных достаточно, чтобы найти все неизвестные. Например, составим систему уравнений, которая описывает приведенные условия:

$$CU = N_P + N_F \tag{10}$$

$$\frac{3}{2}CU = 2N_P + N_F. \tag{11}$$

Из этих двух уравнений можно получить, что:

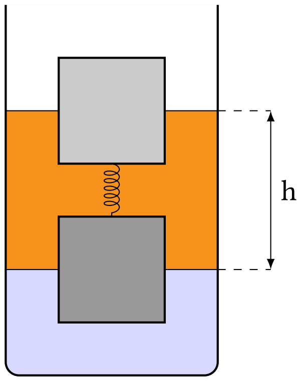
$$N_F = \frac{1}{2}CU. \tag{12}$$

Величина CU это, фактически, количество частиц, находящихся в объеме 15 м^3. Таким образом, $N_F = 1500 \cdot 10^6$, где мы учли, что 1 м^3 = 10^6 см^3. За одну секунду с пола улетает в 60 раз меньше частиц, т.е. $N_F/60$.

<u>Ответ:</u> За одну секунду с пола улетает $25 \cdot 10^6$ частиц пыли.

Второй этап

Задача 5. Две жидкости



Пусть массы тел m_1 и m_2, жесткость пружины k, а l и Δx — ее длина и перемещение, a — длина ребра кубика, ρ_1 и ρ_2 — плотности масла и воды.

Так как тела покоятся, равнодействующая всех сил, действующих на каждое тело равна нулю.

На верхнее тело действуют сила тяжести $m_1 g$, сила упругости $k\Delta x$ и сила Архимеда $\rho_1 g \frac{a^3}{2}$, где ρ_1 это плотность масла. Учитывая направления этих сил и считая, что пружина растянута можно написать

$$m_1 g = \rho_1 g \frac{a^3}{2} - k\Delta x. \tag{13}$$

Для второго тела ситуация аналогична, только сила Архимеда выражается сложнее и сила упругости направлена в другую сторону, поэтому

$$m_2 g = \rho_2 g \frac{a^3}{2} + \rho_1 g \frac{a^3}{2} + k\Delta x. \tag{14}$$

Найдем растяжение пружины. Зная, что $\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{3}$ запишем

$$\frac{\rho_1 g \frac{a^3}{2} - k\Delta x}{\rho_2 g \frac{a^3}{2} + \rho_1 g \frac{a^3}{2} + k\Delta x} = \frac{1}{3}. \tag{15}$$

Из получившегося соотношения можно выразить Δx формульно или сразу подставив числа. Формульный результат имеет вид

$$\Delta x = \frac{3}{4} \frac{g \frac{a^3}{2}}{k} \frac{2\rho_1 - \rho_2}{3} = \frac{g a^3}{8k}(2\rho_1 - \rho_2). \tag{16}$$

После подстановки чисел $\Delta x = 1$ см.

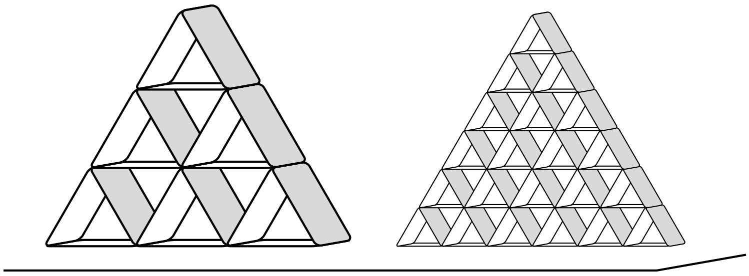
Теперь поймем, как удлинение пружины связано с высотой столба масла h. Из рисунка понятно, что

$$\Delta x = h - \frac{a}{2} - \frac{a}{2} - l, \tag{17}$$

где l — начальная длина пружины. Тогда $h = 21$ см

<u>Ответ:</u> 21 см.

Задача 6. «Тройка, семерка, туз»



Пусть n — количество этажей в карточном домике. Можно найти число карт, которое использовано для его постройки

$$N = 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2}. \tag{18}$$

А масса всего домика будет равна

$$M = m_0 N, \tag{19}$$

где m_0 — масса одной карты. Заметим еще, что высота домика пропорциональна n.

Если взять карты вдвое меньше, то масса одной карты будет равна $m_0' = \frac{m_0}{4}$. А для того чтобы высота домика не изменилась нужно собрать $n' = 2n$ этажей. Масса нового домика равна

$$M' = m_0' N' = \frac{3}{2}\frac{m_0}{4}(4n^2 + 2n) = \frac{3}{2} m_0 \left(n^2 + \frac{n}{2}\right) \tag{20}$$

Тогда из условия

$$\frac{M'}{M} = 0{,}9 \tag{21}$$

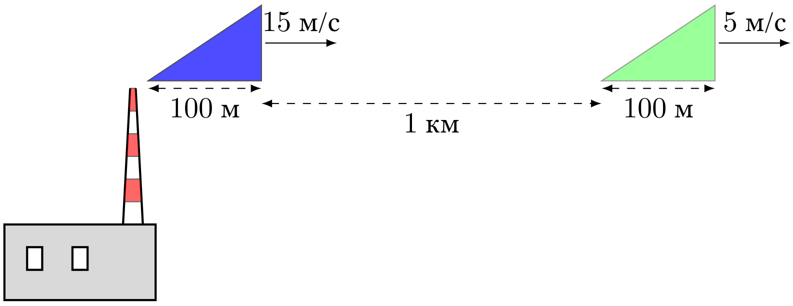
получается уравнение, из которого можно найти n.

$$\frac{1 + \frac{1}{2n}}{1 + \frac{1}{n}} = 0{,}9. \tag{22}$$

Его решение $n = 4$. Значит первый домик состоял из четырех этажей и содержал 30 карт.

Ответ: 30 карт.

Задача 7. Снежная



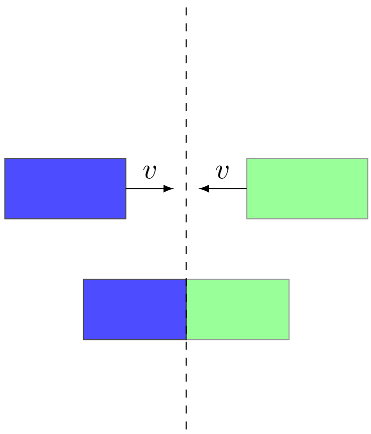
Обозначим длину основания облака l, а начальное расстояние между облаками L. Скорости облаков v_1 и v_2. Скорость их сближения $v_{\text{сбл}} = v_2 - v_1$.

Разобьем движение на несколько частей. Рассмотрим первую из них, во время которой снег выпадать не будет. На ней левое облако догоняет правое до того момента, когда между ними произойдет контакт. На это требуется время, равное

$$t_1 = \frac{L}{v_{\text{сбл}}} = \frac{1\text{ км}}{10\text{м/с}} = 100\text{с}. \tag{23}$$

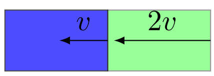
После этого между контактирующими частями облаков будет происходить взаимодействие, которое стоит рассмотреть более подробно. Понятно, что снег будет образовываться на границе, разделяющей различные вещества, и следует понять, как эта граница будет располагаться в пространстве.

Рассмотрим для начала более простой случай, когда облака имеют форму прямоугольников, движущихся навстречу друг другу с одинаковыми скоростями.



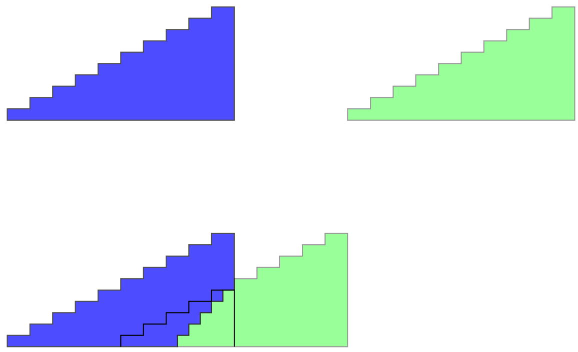
Понятно, что в таком случае из соображений симметрии можно сказать, что граница контакта будет оставаться на одном месте и быть точно посередине между внешними вертикальными границами облаков.

Если перейти в систему отсчета, в которой левое облако покоится, то после контакта его левая граница будет неподвижна, а линия контакта будет двигаться влево со скоростью v, то есть с вдвое меньшей, чем правое облако в этой системе отчета.

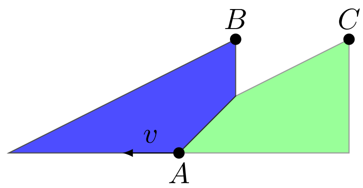


Два прямоугольных облака в системе отсчета, где левое облако покоится.

Теперь вернемся к нашему случаю. Представим треугольники как лесенки с очень мелкими ступеньками. Тогда можно понять, как взаимодействуют отдельные прямоугольники, образующие ступеньки и найти, в итоге, как будет располагаться граница раздела. Удобно рассматривать процесс в системе отсчета левого облака.



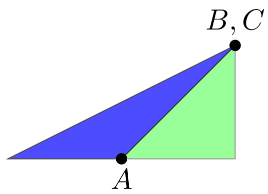
Видно, что каждая грань ступеньки, соприкасаясь со вторым облаком, начинает двигаться вдвое медленнее. Тогда, если вернуться к непрерывному рассмотрению, границей раздела будет участок прямой, имеющей вдвое больший коэффициент наклона, чем наклонная сторона треугольника.



Точка A на нижней стороне облака, через которую проходит граница раздела будет двигаться со скоростью $v = \frac{v_{\text{сбл}}}{2}$.

Можно понять, что количество выпадающего снега в единицу времени равно числу провзаимодействовавших частиц, а оно пропорционально высоте границы раздела. Тогда нужно найти момент времени, в который высота границы раздела максимальна. Ясно, что это тот момент, когда граница проходит через вершину B треугольника. В этот момент вершина правого облака (точка C) совпадает с точкой B. Точка A в этот момент дойдет до середины основания, а это займет время

$$t_2 = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{v_{\text{сбл}}}{2}} = \frac{l}{v_{\text{сбл}}} = \frac{100\ \text{м}}{10\ \text{м/с}} = 10\ \text{с}. \tag{24}$$



Тогда в сумме с начала движения до искомого момента пройдет

$$t = t_1 + t_2 = 110\ \text{с}. \tag{25}$$

После этого момента снег идти не перестанет, так как не провзаимодействовавшие части облаков еще остались. Снег будет идти, начиная с момента касания, и до того момента, как точка A дойдет до левой границы основания. На это понадобится время

$$t_2' = \frac{l}{v_{\text{сбл}}} = \frac{100\ \text{м}}{5\ \text{м/с}} = 20\ \text{с} \tag{26}$$

Ответ: Максимум выпадения в момент 110 с, продолжительность снегопада — 20 с.