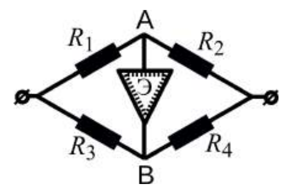
Городской тур 2018/19. 10 класс

Задача 1.

Пусть сначала, для определённости, напряжение приложено к Устройству так, что ток течет слева направо. Также удобно отсчитывать электрический потенциал от правого контакта Устройства (т.е. считать, что его потенциал нулевой). Тогда по условию левый контакт должен иметь положительный потенциал, численно равный U – напряжению, поданному на схему.

Когда напряжение на устройстве мало, разность потенциалов $\phi_A - \phi_B$ также мала, поэтому элемент Э не проводит электричество. В этом случае элемент Э можно исключить из рассматриваемой схемы и легко найти потенциалы точек A и B:

Рис. 1:



$$\phi_A = \frac{UR_2}{(R_1 + R_2)}, \qquad \phi_B = \frac{UR_4}{(R_3 + R_4)}.$$

Чтобы схема работала в этом режиме, необходимо по условию, чтобы

$$\frac{UR_2}{(R_1 + R_2)} < \frac{UR_4}{(R_3 + R_4)} + U_0 \qquad \Rightarrow \qquad U < U_k = U_0 \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_2R_3 - R_1R_4}.$$

Важно, что найденное критическое значение напряжения U_k, при котором элемент Э меняет режим работы, может быть как положительным, так и отрицательным, в зависимости от соотношения сопротивлений. Если $U_k < 0$ это означает, что переключение элемента не происходит при рассматриваемой полярности подключения. Когда же напряжение приложено к Устройству так, что ток течет **справа налево**, переключение режимов произойдет при напряжении $-U_k$.

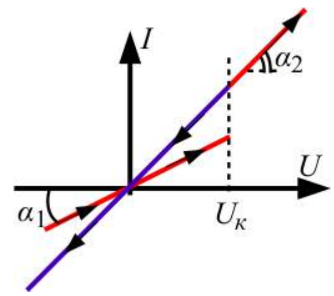


Рис. 2:

Суммарное сопротивление схемы в исследуемом режиме, очевидно, равно

$$R_\Sigma = \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}, \tag{1}$$

а вольт-амперная характеристика представляет собой прямую, угол наклона которой задаётся выражением (1).

Как только U достигло (и потом превзошло) величину U_k, элемент Э можно заменить на провод без сопротивления. При этом вольт-амперная характеристика снова представляет собой прямую, угол наклона которой задаётся новым суммарным сопротивлением схемы

$$R'_\Sigma = \frac{R_1R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2R_4}{R_2 + R_4}. \tag{2}$$

Требуемый график представлен на рисунке 2, углы наклона графиков

$$\operatorname{ctg}\alpha_1 = R_\Sigma, \qquad \operatorname{ctg}\alpha_2 = R'_\Sigma. \tag{3}$$

<u>Ответ</u>: Если ток через схему течет слева направо, требуемый график представлен на рисунке 2. Красная линия соответствует постепенному увеличению напряжения, поданного на схему, при $U = U_k$ график демонстрирует скачок: перескок на другую прямую. Фиолетовая линия соответствует постепенному уменьшению напряжения. Параметры графика $\alpha_{1,2}$ указаны в выражениях (1,2,3); критическое напряжение

$$U_k = U_0 \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_2R_3 - R_1R_4}.$$

При $U_k < 0$ переключение режима осуществляется при отрицательном напряжении. При этом при положительных U (выбранной полярности подключения) график состоит лишь из красной линии. Противоположная полярность соответствует отражению графика по горизонтали и замене $U_k \to -U_k$

В случае сбалансированного моста ($U_k = \infty$) элемент Э всегда выключен, то есть график состоит лишь из линии с углом наклона α_1 при любой полярности подключения.

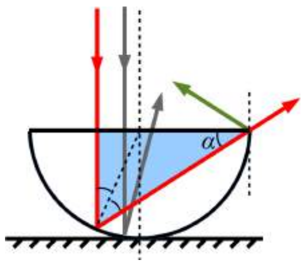


Рис. 3:

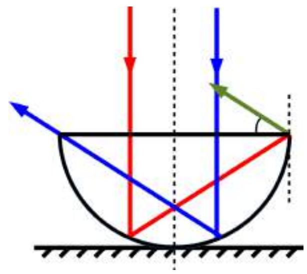


Рис. 4:

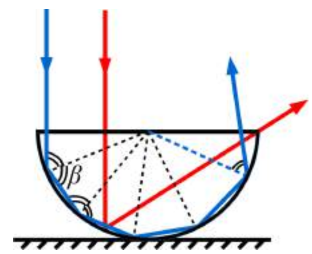


Рис. 5:

Задача 2.

Луч, падающий на чашку в центре, отражается строго вверх. Чем дальше от центра попадает луч, тем больший угол падения луча на зеркало (отсчитываемый, как обычно, от нормали).

Найдется луч, который после отражения попадет точно на край чашки (см. красный луч на рис. 3, здесь и далее "цвет луча" соответствует цвету линии на рисунке). На рисунке отмечен угол α и равные ему углы по закону отражения света от зеркала. Из закрашенного на рисунке прямоугольного треугольника легко понять, что сумма двух непрямых углов в нем должна быть равна $90°$, то есть $\alpha = 30°$. Лучи, попавшие на чашку ближе к центру, чем этот (например, серый луч), будут отклонены от вертикали меньше, а значит, не они определяют край светового пятна на потолке.

Луч, который падает на чашку чуть-чуть дальше от центра, чем рассмотренный красный луч, сможет отразиться от чашки дважды. Его ход после второго отражения показан на рисунке зеленой стрелкой. Этот луч будет отклонен от вертикали также, как красный, только в другую сторону, ведь край чашки представляет собой вертикальный участок зеркала. При этом из рис. 4 несложно понять, что зеленый луч также не попадет на край светового пятна: гораздо ближе к краю окажется луч, симметричный красному относительно середины чашки (он изображен синим).

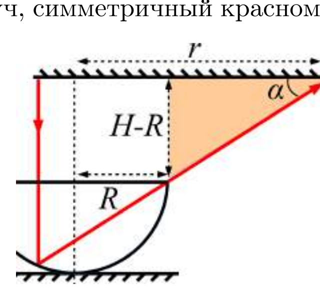


Рис. 6:

Наконец, еще более удаленные от центра чашки лучи, претерпят два и более отражений (см. синий луч на рис. 5). Однако, при этих отражениях угол β неизменен, и становится тем больше, чем дальше от центра он попадает на чашку. Одновременно, нормаль к зеркалу при последнем отражении от чашки уже не горизонтальна, как у красного луча, а отклонена, Оба этих фактора "работают" в одну сторону: они "ухудшают" степень отклонения отражённого в конце концов луча от вертикали по сравнению с уже рассмотренным красным лучом.

Поэтому именно красный луч из всех рассмотренных попадает на край светового пятна на потолке и определяет его радиус r. Последний легко вычислить из треугольника, заштрихованного на рис. 6:

$$r - R = (H - R)\operatorname{ctg}\alpha,$$

откуда сразу выражается ответ.

Примечание: Доказательство того факта, что именно красный луч попадает на край пятна на потолке, является **важной частью решения**.

Примечание: Соблазн использовать фокусирующее свойство сферического зеркала обманчив: фокусировка в точку $R/2$ происходит только в "приближении параксиальных лучей" – т.е тех, которые слабо отклонены от главной оптической оси зеркала. Легко проверить, что красный луч не проходит через точку $R/2$.

Ответ: Радиус пятна $r = H\sqrt{3} + R(1 - \sqrt{3})$.

Задача 3.

Обозначим объем корпуса V_0, а объём трубы $2v_0$. Пусть количество вещества газа ν. Очевидно, до погружения агрегата

$$P_0 V_0 = \nu R T_0. \tag{4}$$

Поршень может выбить из трубы как наружу, так и во внутрь агрегата. При этом в момент выбивания поршня объем газа будет равен $V_0 \pm v_0$ (знак определяется тем, в какую сторону выбьет поршень).

Пусть агрегат опустился на глубину h. Тогда давление газа в нём $P_0 + \rho g h$. Температура, при которой поршень выбьет на этой глубине определяется равенством

$$(P_0 + \rho g h)(V_0 \pm v_0) = \nu R T.$$

Разделив это равенство на соотношение (4), получим

$$(1 + \frac{\rho g h}{P_0})(1 \pm 0.1) = \frac{T}{T_0} \qquad \Rightarrow \qquad T = (1 \pm 0.1) T_0 (1 + \frac{\rho g h}{P_0}).$$

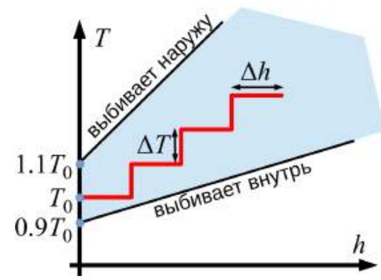


Рис. 7:

Верхний знак в этом равенстве соответствует выбиванию поршня наружу, нижний — внутрь. Изобразим полученные равенства в виде зависимостей на графике $T(h)$ (см. рис. 7). Заштрихованная область соответствует ситуации, когда поршень не выбило ни в одну сторону. Она ограничена построенными линиями, причем легко понять, что тангенс их угла наклона равен $0.9\rho g T_0/P_0$ и $1.1\rho g T_0/P_0$.

По условию процесс периодического нагревания газа при погружении изображается на этом графиек ступенчатой линией, причём ширина ступенек Δh, а высота ΔT. Чтобы через большой промежуток времени ступенчатая линия оставалась внутри заштрихованной области, нужно, чтобы "крутизна" подъема ступенек лежала в промежутке между "крутизной" ограничивающих линий:

$$\frac{0.9\rho g T_0}{P_0} \le \frac{\Delta T}{\Delta h} \le \frac{1.1\rho g T_0}{P_0}.$$

Отсюда легко получить условие на искомое Δh:

$$\frac{\Delta T P_0}{1.1\rho g T_0} \le \Delta h \le \frac{\Delta T P_0}{0.9\rho g T_0}. \tag{5}$$

Также понятно, что ширину ступенек надо ограничить, чтобы ступеньки не вышли за линию "выбьет внутрь" на самом первом шаге:

$$T = 0.9 T_0 (1 + \frac{\rho g \Delta h}{P_0}) \le T_0 \qquad \Rightarrow \qquad \Delta h \le \frac{P_0}{9\rho g}. \tag{6}$$

Ответ: Необходимо одновременное выполнение трёх неравенств (5,6).

Задача 4.

Существует множество способов бросить Кольцо: можно заставить отскакивать его от крыши или ехать вдоль неё. Какой же способ будет соответствовать наименьшей начальной скорости броска?

Легко понять, что при движении Кольца энергия сохраняется, ведь трением можно пренебречь. Значит, начальная скорость броска должна обеспечить конечную потенциальную и кинетическую энергию Кольца. Потенциальная энергия Кольца в конце строго фиксирована высотой точки С. Поэтому чем меньше скорость Кольца в конечный момент, тем меньше и начальная энергия броска, а вместе с ней и начальная скорость.

Насколько можно минимизировать скорость Кольца в конечный момент? Можно ли сделать так, чтобы она вообще обратилась в ноль? Если Кольцо только летит по параболе, не задевая крышу, его горизонтальная скорость постоянна, и в конечный момент полета скорость ненулевая.

К счастью, можно обратить задачу во времени. Пусть Сэм отпустил бы Кольцо без начальной скорости. Оно, очевидно, съехало бы до края крыши, а потом полетело по параболе до земли. Если Фродо встанет в точку, где упало бы Кольцо, и бросит его строго обратно, то, очевидно, при этом Кольцо въедет по крыше и будет иметь в точности нулевую скорость наверху. Это именно тот случай наименьшей начальной скорости броска, который мы искали!

Конечная скорость падения Кольца с высоты $ka+a\sqrt{3}/2$ на землю без начальной скорости определяется по закону сохранения энергии, $V=\sqrt{ga(2k+\sqrt{3})}$. Именно с этой скоростью должен выполнить бросок Фродо.

Найдем, куда упало бы Кольцо, если бы его отпустил Сэм. В момент отрыва от крыши Кольцо имело бы скорость $u=\sqrt{ga\sqrt{3}}$ (по закону сохранения энергии при спуске с крыши высотой $a\sqrt{3}/2$). Его горизонтальная и вертикальная проекции скорости при этом

$$u_x = u\cos 60^\circ = \frac{\sqrt{ga\sqrt{3}}}{2}, \qquad u_y = u\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}\sqrt{ga\sqrt{3}}}{2}.$$

Дальше Кольцо движется по параболе по закону

$$oX: \quad x(t)=u_x t, \qquad oY: \quad y(t)=ka-u_y t-\frac{gt^2}{2}.$$

Время свободного падения Кольца T легко найти:

$$ka-u_yT-\frac{gT^2}{2}=0 \qquad \Rightarrow \qquad T=\left(\pm\sqrt{u_y^2+2gka}-u_y\right)\frac{1}{g}.$$

Выбирая положительный корень и подставляя это время в $x(t)$ найдем, на каком расстоянии от укрепления упадет Кольцо: $L=u_xT$. Осталось только подставить в полученое выражение u_x и u_y и упростить его:

$$L=u_xT=\frac{\sqrt{ga\sqrt{3}}}{2}\left(\sqrt{\frac{3\sqrt{3}ga}{4}+2kga}-\frac{\sqrt{3}\sqrt{ga\sqrt{3}}}{2}\right)\frac{1}{g}=\frac{a}{4}(\sqrt{9+8k\sqrt{3}}-3). \tag{7}$$

Осталось выяснить, под какик углом α к горизонту двигалось бы Кольцо у земли при падении из точки С. Очевидно, $\operatorname{tg}\alpha = V_y/V_x$, где $V_x=u_x$ – уже известная горизонтальная скорость Кольца у земли, а V_y – вертикальную скорость Кольца у земли легко найти по закону сохранения энергии для вертикальной проекции скорости:

$$V_y^2=u_y^2+2gka=ga\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}+2k\right).$$

Таким образом

$$\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{V_y^2}{V_x^2}=ga\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}+2k\right)\frac{4}{ga\sqrt{3}}=3+\frac{8k}{\sqrt{3}}, \qquad \alpha=\operatorname{arctg}\sqrt{3+\frac{8k}{\sqrt{3}}}. \tag{8}$$

<u>Ответ</u>: Бросать надо со скоростью $V=\sqrt{ga(2k+\sqrt{3})}$ под углом α из точки, находящейся от края укрепления на расстоянии L, где L и α задаются соотношениями (7,8).

Задача 5.

Обозначим длину требуемого куска прожины L. Жесткость его K легко вычислить, зная что пружина из того же материала, но длиной R, будет иметь известную жесткость k. Действительно, при фиксированном материале пружины и толщине, жесткость *обратно пропорциональна* длине. Это легко понять, если сообразить, например, что две последовательно соединенные одинаковые пружины растянутся под весом заданного груза в два раза *больше*, чем каждая из этих пружин в отдельности. Поэтому

$$K = \frac{kR}{L}. \tag{9}$$

Деформация такой пружины, расположенной в нашей системе, будет, очевидно, $\Delta x = L - 2R$. На первый взгляд, требуется взять такую пружину, чтобы сила ее натяжения компенсировала вес, $K\Delta x \geq mg$.

Однако при этом, как легко показать, система будет неустойчивой относительно случайного поворота пружины вокруг шарнира O. Для устойчивости, как мы сейчас увидим, нужна более длинная пружина.

Действительно, пусть пружина отклонилась от вертикали на малый угол α. Силы, действующие на шарик при этом, указаны на рис. 8 (F – сила реакции пружины, N – сила реакции сферы). На рисунке указаны необходимые соотношения между углами.

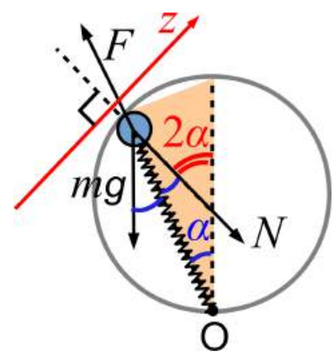


Рис. 8:

Чтобы шарик вернулся в вертикальное положение, нужно, чтобы в проекции на ось z результирующая от сил N, F и mg была положительна, то есть чтобы

$$F \sin\alpha \geq mg \sin(2\alpha).$$

При этом сила F определяется длиной пружины, которая равна $2R\cos\alpha$ (из заштрихованного треугольника на рисунке), поэтому деформация пружины равна $L - 2R\cos\alpha$, и неравенство можно переписать:

$$K(L - 2R\cos\alpha)\sin\alpha \geq mg\sin(2\alpha).$$

Будет достаточно, если это неравенство будет выполняться только при малых отклонениях α, то есть когда $\sin\alpha \simeq \alpha$, $\cos\alpha \simeq 1$, поэтому

$$K(L - 2R)\alpha \geq 2mg\alpha \qquad \Rightarrow \qquad K(L - 2R) \geq 2mg.$$

Подставляя сюда (9) и выражая L, получим ответ

Ответ: нужен кусок длиной $L = 2kR^2/(kR - 2mg)$.

Разбалловка задач 10 класса.

Задача 1 (всего 10 баллов).

A	Получено общее сопротивление в одном режиме:	$R_\Sigma = \dfrac{(R_1+R_2)(R_3+R_4)}{R_1+R_2+R_3+R_4}$	**2 балла**
B	Получено общее сопротивление во втором режиме:	$R'_\Sigma = \dfrac{R_1R_3}{R_1+R_3} + \dfrac{R_2R_4}{R_2+R_4}$	**2 балла**
C	Получено значение критического напряжения, когда режимы меняются	$U_k = U_0\dfrac{(R_1+R_2)(R_3+R_4)}{R_2R_3-R_1R_4}$	**3 балла**
D	График «с переключением»: две прямые, проходящие через 0, и вертикальная линия перехода при U_k.		**2 балла**
E	Знак U_k разный; если U_k отрицательно, переключения нет. Но оно появится при смене полярности.		**1 балл**

Задача 2 (всего 10 баллов).

A	Построен луч, проходящий через край чашки и идущий после отражения под углом 30° к горизонту.	**3 балла**
B	Из хода этого луча найден ответ $r = H\sqrt{3} + R(1-\sqrt{3})$ (с арифметической ошибкой — минус балл).	**2 балла**
C	Лучи, падающие ближе к центру чашки, чем построенный луч, не попадают на край пятна.	**1 балл**
D	Доказано, что нет лучей, идущих более наклонно, чем рассмотренный (для всех вариантов лучей).	**4 балла**
	Лучи, падающие дальше от центра, только нарисованы; сказано, что они «очевидно» не подходят.	1 балл
	Забыт «обратный» луч, также идущий под углом 30° к горизонту.	3 балла

Задача 3 (всего 10 баллов).

A	Уравнение Клайперона-Менделеева.	**1 балл**
B	Давление газа в аппарате = атмосферное давление + ρgh.	**1 балл**
C	Условие выбивания поршня наружу и вовнутрь (по баллу за каждое).	**2 балла**
D	Получено неравенство $\Delta h \le P_0/(9\rho g)$ (если условие фигурирует как равенство – минус балл).	**2 балла**
E	Невыбивание внутрь через большое время, $\Delta h \le P_0\Delta T/(0.9\rho g T_0)$.	**2 балла**
F	Невыбивание наружу через большое время, $\Delta h \ge P_0\Delta T/(1.1\rho g T_0)$.	**2 балла**
Рассмотрено число шагов n, предел $n\to\infty$ даёт верное неравенство, но оно, однако, не получено – минус балл и по E, и по F.		

Задача 4 (всего 10 баллов).

A	Формулы движения в гравитационном поле	**3 балла**
B	Минимизация скорости броска (адекватная)	**2 балла**
C	Скорость на краю крыши	**1 балл**
D	Время падения (взлета) с края крыши	**2 балла**
E	Точка броска	**1 балл**
F	Скорость и угол броска	**1 балл**

Задача 5 (всего 10 баллов).

A	Зависимость жесткости пружины от начальной длины	**3 балла**
B	Длина пружины как функция силы	**2 балла**
C	Анализ устойчивости	**2 балла**
D	Верный ответ на задачу	**3 балла**