10 класс

10 класс. Задача 1: “Нелинейная резинка”

Растяжение стержней описывается обобщенным законом Гука

$$\sigma = E\varepsilon,$$

где $\sigma = F/S$ – механическое напряжение, $\varepsilon = \Delta l/l$ – относительное удлинение, E – модуль Юнга. При растяжении тела наряду с изменениями продольных размеров происходит также изменение его поперечных размеров, которые характеризуются коэффициентом Пуассона. Коэффициент Пуассона ν представляет собой отношение относительного уменьшения поперечных размеров тела к относительному увеличению его продольных размеров: $\nu = -\dfrac{\Delta d/d}{\Delta l/l}$.

Задание

1. Исследуйте зависимость продольного растяжения резинки x от приложенной к ней силы F.

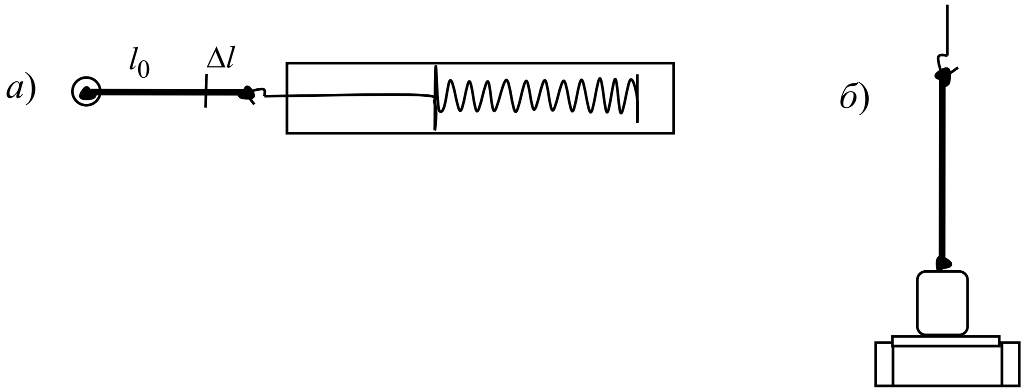
2. Зависимость силы от смещения имеет вид $F(x) = ax^b$. Определите параметры a и b этой зависимости.

3. Определите модуль Юнга и коэффициент Пуассона резинки.

Оборудование: резинка, груз 150-200 г, электронные весы, канцелярский зажим, линейка, микрометр по требованию, миллиметровая бумага, пластиковый стакан, вода, нитки и ножницы по требованию.

Решение

Измерения продольного растяжения резинки могут быть проведены в наиболее простой конфигурации опыта с использованием пружинного динамометра, рис. 1*а*, причем другой конец резинки крепится с помощью длинной кнопки к столу или дощечке. С целью достижения более высокой точности результатов, эксперимент может быть проведен с использованием электронных весов с точностью 0.01 г и груза, не превышающего предела измерений этих весов (в эксперименте были использованы весы с пределом измерения 200 г), рис. 1*б*.

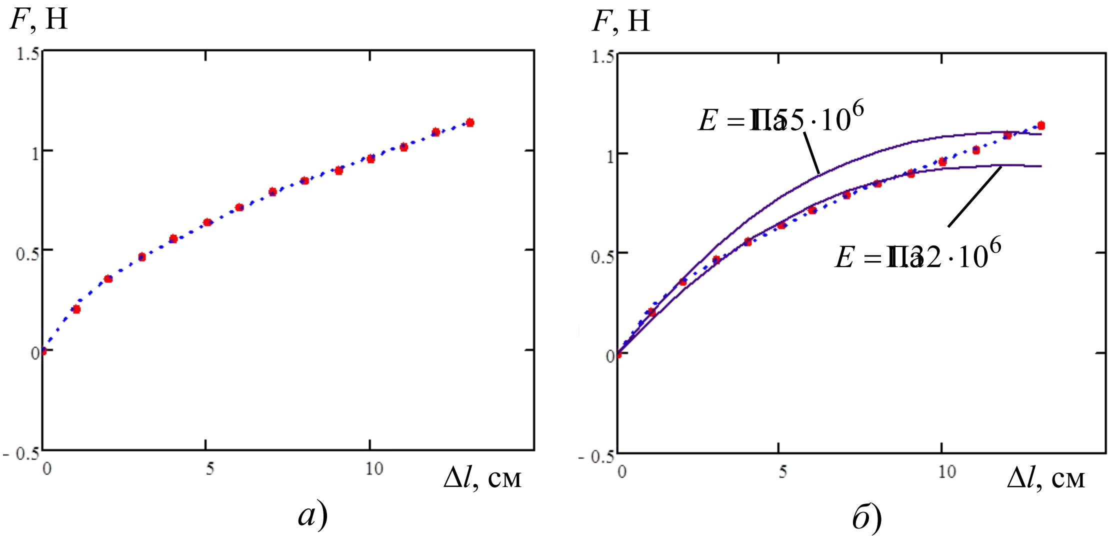


1. Исследование зависимости продольного растяжения резинки от приложенной к ней продольной силы.

На рис. 2*а* приведены результаты измерений для тестового эксперимента (точки) с наложенной эмпирической функциональной зависимостью (пунктир) вида

$$F = a(\Delta l)^b,\ \text{где}\ a = 0.239\ \text{Н/см}^b,\ b = 0.611.$$

Длина нерастянутой резинки составила $l_0 = 16.5$ см, толщина $d_0 = 2$ мм.



а) *б*)

Рис. 2. Зависимости силы упругости от продольного удлинения

Для объяснения наблюдаемой нелинейности проведем следующее рассмотрение. Растяжение и сжатие стержней и нитей, как правило, описывают линейным обобщенным законом Гука, который в терминах механического напряжения $\sigma = F/S$ и относительного удлинения $\varepsilon = \Delta l / l$ имеет вид

$$\sigma = E\varepsilon,$$

где E – модуль Юнга резины. При растяжении тела наряду с изменениями продольных размеров происходит также изменение его поперечных размеров, которые характеризуются коэффициентом Пуассона. Коэффициент Пуассона ν представляет собой отношение относительного уменьшения поперечных размеров тела к относительному увеличению его продольных размеров:

$$\nu = -\frac{\Delta d / d_0}{\Delta l / l_0}.$$

Учтем изменение толщины резинки при ее удлинении. Из следует выражение для изменения размера поперечного сечения резинки

$$\Delta d = -\frac{\nu d_0 \Delta l}{l_0}.$$

В экспериментах использовалась резинка квадратного сечения, поэтому площадь поперечного сечения резинки будет

$$S = \left(d_0 + \Delta d\right)^2 = \left(d_0 - \frac{\nu \Delta l\, d_0}{l_0}\right)^2 = d_0^2 \left(1 - \frac{\nu\, \Delta l}{l_0}\right)^2.$$

Подставляя в , получим

$$F = E d_0^2 \frac{\Delta l}{l_0}\left(1 - \nu \frac{\Delta l}{l_0}\right)^2.$$

На основе экспериментальной зависимости силы F от Δl или F от $\Delta l / l_0$ можно определить модуль Юнга резины E и коэффициент Пуассона ν. Для определения модуля Юнга необходимо брать область малых значений Δl, в которой поправка за счет коэффициента Пуассона сказывается слабо.

$$E = \frac{F_0 l_0}{\Delta l d_0^2}.$$

Полученные согласно теоретические кривые представлены на рис. 1*б* сплошными линиями при значениях модуля Юнга $E_{12} = 1.55 \cdot 10^6$ Па, определенному по первой и второй точкам зависимости, и при $E_{13} = 1.32 \cdot 10^6$ Па, определенному по первой и третьей точкам зависимости. Найденные значения модуля Юнга близки к справочному табличному значению модуля Юнга резины $E = 1.5 \cdot 10^6$ Па. Несколько различающийся характер теоретических и экспериментальных зависимостей позволяет сделать вывод о наличии неучтенного механизма, влияющего на силу упругости резинки, например, нарастание жесткости при больших удлинениях, связанную с нарушением линейного закона Гука при больших деформациях.

Для определения коэффициента Пуассона уравнение можно преобразовать к виду

$$\sqrt{\frac{Fl_0}{Ed_0^2\Delta l}} = 1 - \nu \frac{\Delta l}{l_0}.$$

Определение углового коэффициента в полученной линеаризованной зависимости позволяет найти коэффициент Пуассона $\nu = 0.426$, рис. 3. Нелинейность в экспериментальной зависимости также позволяет сделать вывод о наличии нарастания жесткости при больших удлинениях.

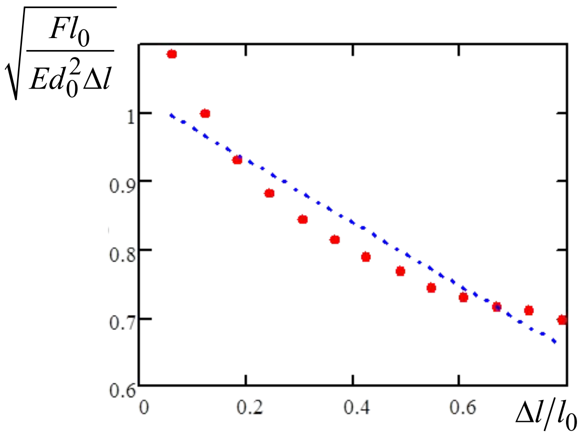


Рис. 3. К определению коэффициента Пуассона

Для проверки полученного значения коэффициента Пуассона было проведено измерение объема исследуемой резинки в нерастянутом и растянутом состояниях методом гидростатического взвешивания.

Поскольку

$$V = V_0(1+\varepsilon)(1-\nu\varepsilon)^2,$$

коэффициент Пуассона может быть найден как

$$\nu = \frac{1}{\varepsilon}\left(1 - \sqrt{\frac{V}{V_0(1-\varepsilon)}}\right).$$

Полученное в эксперименте при относительном удлинении $\varepsilon = 0.35$ по формуле значение $\nu = 0.52 \pm 0.03$. Справочное значение коэффициента Пуассона для резины $\nu = 0.5$ попадает в доверительный интервал результата эксперимента на основе гидростатического взвешивания, но отличается на

15 % от значения, полученного на основе зависимости силы упругости от относительного удлинения.

Критерии оценивания

1.	Описана установка	1 балл
2.	Проведены измерения п. 1 в диапазоне от 0 до веса груза, результаты сведены в таблицу.	1 балл
3.	Построен график $\ln F$ от $\ln \Delta l$. (0,5 балла), правильно указаны физические величины на осях и единицы их измерения (0,5 балла), шкала (значения целые, четные или делящиеся на 5) (0,5 балла), правильно выбран масштаб по осям (кривая занимает не менее 75 % от поля графика) (0,5 балла)	2 балла
4.	Найдены значения показателя a	1 балл
5.	Найдены значения показателя b.	1 балл
6.	Выведена формула для E	1 балл
7.	Определен модуль Юнга резинки. Значение попало в интервал $E = (1.3...1.7)\cdot 10^6$ Па	2 балла
8.	Определен коэффициент Пуассона методом 1 Выведена формула	2 балла
9.	Определен коэффициент Пуассона резинки по графику на основе . Значение попало в интервал 0.4…0.6	1 балл
10.	Или определен коэффициент Пуассона методом 2 Выведена формула для ν	2 балла
11.	Определен коэффициент Пуассона резинки на основе . Значение попало в интервал 0.45…0.55	1 балл
12.	Или определен коэффициент Пуассона методом 3 (по непосредственному измерению толщины резинки)	3 балла

Оцениваются 2 метода определения коэффициента Пуассона из трех описанных в авторском решении.

10 класс. Задача 2: “Тепловые свойства свечи”

В задачах на теплообмен обычно предполагается, что количество теплоты, отдаваемое горячим телом в единицу времени прямо пропорционально разности температур между горячим и холодным телом. Следовательно, можно записать следующее выражение:

$$C\Delta T = \alpha(T_в - T_к)\,\Delta t,$$

где C – теплоемкость воды, ΔT – изменение температуры воды за малое время Δt, $T_в$ – температура воды, $T_к$ – температура окружающей среды, α – коэффициент пропорциональности, зависящий от свойств отдающего тепло вещества, площади и формы поверхности, через которую передается тепло. Коэффициент теплопередачи α для воды остается почти постоянным примерно до 80°С. При больших температурах он начинает расти из-за интенсификации испарения.

Путем обработки полученных экспериментальных данных определите удельную теплоту плавления парафина. Удельная теплоемкость воды $C_в$ = 4200 Дж/(кг·°С), парафина $C_п$ = 2200 Дж/(кг·°С). Теплоемкостью кофейной чашки и алюминиевой чашечки свечи в условиях эксперимента можно пренебречь.

Внимание!!! При работе с горячей водой соблюдать предельную осторожность и проявить максимальное внимание с целью избежать опрокидывания стакана с водой!

Парафин из фольгового стаканчика свечи в воду не выливать!

Оборудование: плавающая свеча, латунная проволока, кофейная чашка, бумажный или пластиковый стакан, крышка для стакана, мультиметр с термопарой, секундомер, электронные весы по требованию, комнатный термометр (общий на аудиторию), горячая и холодная вода по требованию.

Задание:

1. Определите температуру плавления парафина.
2. Определите коэффициент теплоотдачи α чашки с водой с плавающей в ней свечой.
3. Определите удельную теплоту плавления парафина.

Решение

Основная сложность при проведении этого эксперимента, заключается в том, что парафин плохо проводит тепло, и плавление и застывание идут неравномерно по объему. Для нейтрализации этого эффекта в опыте целесообразно использовать латунную спираль, перераспределяющую тепло по парафину.

Взвесим свечу и измерим ее начальную температуру $T_{п0}=T_к$. Вставим кофейную чашку в бумажный стакан для уменьшения теплопотерь. Нальем кипящую воду в кофейную чашку, взвесим ее. Пустим плавать в нее парафиновую свечу, предварительно уложив на парафин сверху спираль из латуни для равномерности распределения тепла по парафину. Будем измерять зависимость температуры воды вблизи свечи и парафина от времени.

Обозначим начальную температуру воды $T_{в0}$, комнатную температуру $T_к$, температуру плавления парафина $T_{пл}$, температуру воды при которой начал плавиться парафин $T_{в1}$, температуру воды, при которой расплавился парафин $T_{в2}$, температуру воды, при которой начал застывать парафин $T_{в3}$, температуру воды, при которой парафин застыл $T_{в4}$. Тогда уравнение теплового баланса на этапе нагрева парафина до температуры плавления будет

$$c_в m_в (T_{в0} - T_{в1}) = c_п m_п \left(T_{пл} - T_к\right) + \sum_{i=1}^{n_1} \alpha \left(T_{вi} - T_к\right) \Delta t_i ,$$

Уравнение позволяет найти коэффициент теплопотерь α

$$\alpha = \frac{c_в m_в (T_{в0} - T_{в1}) - c_п m_п \left(T_{пл} - T_к\right)}{\sum_{i=1}^{n_1} \left(T_{вi} - T_к\right) \Delta t_i} ,$$

Уравнение теплового баланса на этапе плавления парафина будет

$$c_в m_в (T_{в1} - T_{в2}) = \lambda m_п + \sum_{i=n_1+1}^{n_2} \alpha \left(T_{вi} - T_к\right) \Delta t_i .$$

Уравнение теплового баланса между полным расплавлением парафина и началом отвердевания (начальная и конечная температуры парафина одинаковы и равны $T_{пл}$) будет

$$c_в m_в (T_{в2} - T_{в3}) = \sum_{i=n_2+1}^{n_3} \alpha\left(T_{вi} - T_к\right)\Delta t_i .$$

Тогда коэффициент теплопотерь

$$\alpha = \frac{c_в m_в (T_{в2} - T_{в3})}{\sum\limits_{i=n_2+1}^{n_3} \left(T_{вi} - T_к\right)\Delta t_i} .$$

Уравнение теплового баланса на этапе отвердевания парафина будет

$$\lambda m_п + c_в m_в (T_{в3} - T_{в4}) = \sum_{i=n_3+1}^{n_4} \alpha\left(T_{вi} - T_к\right)\Delta t_i .$$

Уравнение теплового баланса на этапе охлаждения застывшего парафина будет

$$c_в m_в (T_{в4} - T_{в5}) + c_п m_п \left(T_{пл} - T_{п5}\right) = \sum_{i=n_2+1}^{n_3} \alpha\left(T_{вi} - T_к\right)\Delta t_i .$$

Уравнение также позволяет найти коэффициент теплопотерь α:

$$\alpha = \frac{c_в m_в (T_{в4} - T_{в5}) + c_п m_п \left(T_{пл} - T_{п5}\right)}{\sum\limits_{i=n_2+1}^{n_3} \left(T_{вi} - T_к\right)\Delta t_i}$$

Учитывая, что при высоких температурах α возрастает, большей надежностью обладают расчеты на основе и .

Коэффициент α может быть найден также путем графического дифференцирования зависимости температуры от времени (построение касательной и определение ее углового коэффициента).

Уравнения и позволяют найти удельную теплоту плавления λ:

$$\lambda = \frac{c_в m_в (T_{в1} - T_{в2}) - \alpha \sum\limits_{i=n_1+1}^{n_2} \left(T_{вi} - T_к\right)\Delta t_i}{m_п} ,$$

$$\lambda = \frac{\alpha \sum\limits_{i=n_3+1}^{n_4} \left(T_{вi} - T_к\right)\Delta t_i - c_в m_в (T_{в3} - T_{в4})}{m_п}.$$

Альтернативным методом нахождения λ является расплавление парафина свечи в горячей воде и перекладывание свечи в воду комнатной температуры. При этом, поскольку изменение температуры воды относительно комнатной при застывании парафина мало, теплопотерями можно пренебречь.

$$\lambda = \frac{1}{m_п}\left(c_в m_в \Delta T_{хв}\right) = \frac{c_в m_в}{m_п}\left(T_{хв1} - T_к\right).$$

Однако, поскольку в этом методе свеча с парафином имеет более высокую температуру, чем вода, и свеча находится сверху, конвективный теплообмен в воде будет затруднен. Поэтому для обеспечения равномерности температуры по объему воды нужно ее принудительное перемешивание. Застывание парафина также трудно зафиксировать из-за образующейся непрозрачной корочки на поверхности свечи.

Для уменьшения относительной погрешности, связанной с округлением при измерении температуры необходимо увеличение перепада температуры воды, что достигается, когда количество воды не слишком велико.

Критерии оценивания

1.	Описана методика эксперимента. Указано использование латунной спирали для улучшения теплопередачи	1 балл
2.	Таблица измерений $T_в(t)$ и $T_п(t)$	1 балл
3.	Грамотно оформленный график $T_в(t)$ (0,5 балла), правильно указаны физические величины на осях и единицы их измерения (0,5 балла), шкала (значения целые, четные или делящиеся на 5) (0,5 балла), правильно выбран масштаб по осям (кривая занимает не менее 75 % от поля графика) (0,5 балла)	2 балла
4.	Получены выражения для α, по 1 баллу за любую из формул , , , или метод интегрирования по графику, или метод касательных по графику	3 балла
5.	Получена формула для λ, любая из формул , по 1 баллу за каждую	2 балла
6.	Описана методика определения λ в воде комнатной температуры. Указано, что теплопотерями можно пренебречь при малых изменениях температуры.	1 балл
7.	Указано про слабость конвективного теплообмена, когда разогретая свеча сверху, и про необходимость принудительного перемешивания воды	1 балл
8.	Записана формула для λ.	1 балл
9.	Значения α, правильная величина и размерность	1 балл
10.	Значения λ, попадает в диапазон 150…200 кДж/кг и размерность	1 балл
11.	Проведено обоснованное сопоставление полученных значений α и λ	1 балл