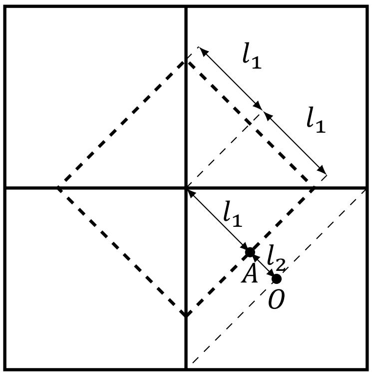
Возможные решения задач. 8 класс

Задача 1. Равновесие плиток

Для начала поймём почему конструкция разваливается. Заметим, что плитка, входящая в цветок представляет из себя рычаг с точкой опоры в A.



Когда сверху ничего нет, на плитку действует лишь сила тяжести, которая приложена к центру масс (O), который находится в центре квадрата. Причём это единственная сила, которая действует на плитку, а раз точка её приложения находится вне опоры, «цветок» разваливается.

Теперь разберёмся с тем, что произойдёт после того, как мы положим сверху стопку из N плиток. Пускай масса одной плитки m. Запишем правило рычага относительно точки A для одной из плиток в «цветке» (из симметрии можно сделать вывод, что каждую плитку из «цветка» уравновешивает четверть от суммарной силы тяжести стопки):

$$l_1 \cdot \frac{1}{4} Nmg \geq l_2 \cdot mg. \tag{1}$$

Отсюда получим условие на количество плиток, которые надо положить:

$$N \geq 4 \cdot \frac{l_2}{l_1}. \tag{2}$$

Осталось определить отношение длин l_1 и l_2. Из геометрических соображений можно заметить, что

$$\begin{cases} l_1 + l_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} L \ \text{(как половина диагонали квадрата)} \\ l_1 = \dfrac{1}{2} L \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l_1 = \dfrac{1}{2} L \\ l_2 = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2} - 1\right) L \end{cases}, \tag{3}$$

где L — сторона одной плитки.

Таким образом

$$N \geq 4 \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right) \approx 1{,}7, \tag{4}$$

значит для того, чтобы уравновесить систему потребуется как минимум две плитки.

<u>Ответ:</u> потребуется хотя бы 2 плитки.

- **1 балл** — Какие моменты сил действуют. (правильный учёт/4)
- **2 балла** — Правильно записанное правило рычага относительно любой точки.
- **1 балл** — Ответ (правильное округление до 2, можно даже по линейке).

Задача 2. Нанороботы

Так как длина стороны треугольника равна 0,5 мм, а скорость роботов 0,1 мм/с, то принципиально «картинка» будет меняться через каждые 5 секунд, когда роботы будут доходить до узлов сетки. Рассмотрим положение роботов в начальный момент времени, через 5 секунд и через 10 секунд после начала движения (см рис. 1). Важно заметить, что следует рассматривать только «максимально удалённых роботов», так как исходя из того, что на старте их было очень много, можно считать, что по любому из возможных путей пройдёт хотя бы один робот, то есть все рёбра на этом пути окажутся покрашенными.

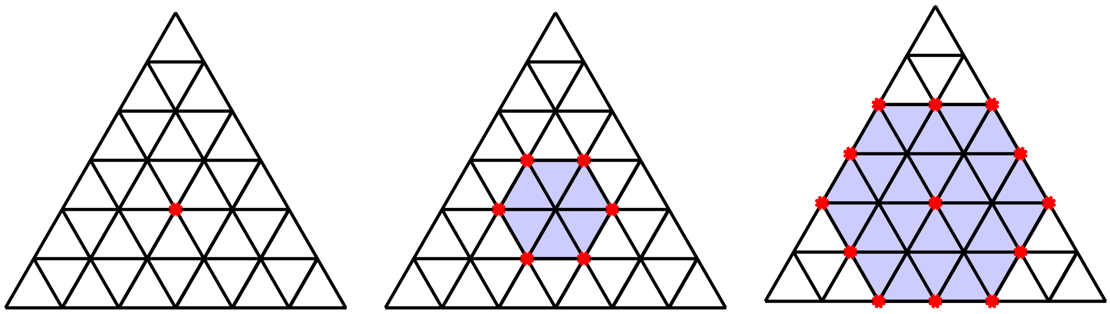


Рис. 1: Первые три шага нанороботов

Из рисунка видно, что получившаяся фигура — шестиугольник, длина стороны которого за каждые 5 секунд увеличивается на $a = 0{,}5$ мм. Таким образом, можно записать длину ребра шестиугольника как:

$$L = a \cdot \frac{t}{5\ \text{с}}. \tag{5}$$

Значит через 3 часа длина стороны шестиугольника будет равна:

$$L = 0{,}1 \frac{\text{мм}}{\text{с}} \cdot 10800\ \text{с} \approx 1\ \text{м}. \tag{6}$$

Остаётся только посчитать площадь шестиугольника со стороной L. Это можно сделать, разбив его на шесть равносторонних треугольников (рис. 2). Тогда площадь шестиугольника через площадь маленького

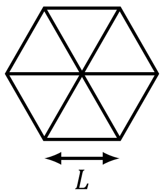


Рис. 2: Подсчёт площади шестиугольника

треугольника записывается как:

$$S = 6 \cdot S_\Delta = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}L^2}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\, L^2 \approx 3\ \text{м}^2. \tag{7}$$

Заметим, что на самом деле рёбра, находящиеся на сторонах шестиугольника не будут покрашены. Однако нас интересует столь большое время, что этим фактом можно пренебречь.

Ответ: площадь пятна, составит 3 м^2.

- **2 балла** — Указано (с объяснением), что пятно будет иметь форму шестиугольника.
- **1 балл** — Правильно посчитан любой из линейных размеров шестиугольника (сторона, длина ребра, и т.д.)
- **1 балл** — Ответ.

Задача 3. Вода и масло

Пускай высота столба масла в левом колене перед тем как положили поршень была равна H, а разность высот в левой и правой частях сосуда — h (рис. 3).

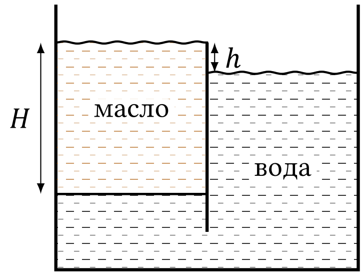


Рис. 3: Положение системы до того, как положили поршень

Запишем условия равенства давлений в левом и правом колене на уровне раздела масло-вода:

$$\rho_{\text{м}} g H = \rho_{\text{в}} g (H - h), \tag{8}$$

отсюда видно, что уровни масла и воды соотносятся как плотности, то есть

$$\frac{H - h}{H} = \frac{\rho_{\text{м}}}{\rho_{\text{в}}} = \frac{4}{5}, \tag{9}$$

значит

$$h = \frac{1}{5} H. \tag{10}$$

Теперь рассмотрим ситуацию с поршнем. Заметим, что поршень будет создавать дополнительное давление на воду, вследствие чего масло начнёт переливаться через перегородку и в итоге окажется справа над поршнем. Поршень кладут медленно, значит можно считать, что в течение всего времени масло в левом колене доходит до края. Значит конечная положение системы выглядит как показано на рисунке 4. Заметим, что суммарный объём жидкости в системе не изменился, поэтому разность высот между левым

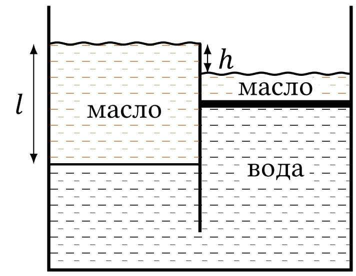


Рис. 4: Положение системы после того, как положили поршень

и правым коленами по прежнему равняется h. Также заметим, что раз поршень находится посередине уровня масла, высота масла в правом колене равна $\frac{l}{2} - h$.

Теперь, использовав тот факт, что левая и правая части сосуда имеют одинаковую площадь, запишем условие сохранения объёма масла в системе:

$$l + \left(\frac{l}{2} - h\right) = H, \tag{11}$$

и подставив связь h и H из (10) получим выражение для l:

$$\frac{3}{2} l = \frac{6}{5} H \Rightarrow l = \frac{4}{5} H. \tag{12}$$

Пусть масса поршня равна M, а площадь сечения левой (а значит и правой) части сосуда равна S. Тогда равенство давлений на уровне A записывается как:

$$\rho_{\text{м}} g l = \rho_{\text{в}} g \frac{l}{2} + \rho_{\text{м}} g \left(\frac{l}{2} - h\right) + \frac{Mg}{S}. \tag{13}$$

Выразив l и h через начальную высоту столба масла H, получим, что

$$\frac{M}{S} = \rho_{\text{м}} \cdot \left(\frac{4}{5}H - \frac{2}{5}H + \frac{1}{5}H\right) - \rho_{\text{в}} \cdot \frac{2}{5}H = \rho_{\text{м}} \cdot \frac{3}{5}H - \rho_{\text{в}} \cdot \frac{2}{5}H. \tag{14}$$

значит масса поршня равна

$$M = \left(\frac{3\rho_{\text{м}} - 2\rho_{\text{в}}}{5}\right) \cdot HS. \tag{15}$$

В формуле (15) все величины известны из условия (HS — объём всего масла в системе). Подставив численные значения получим искомую массу поршня:

$$M = \left(\frac{3 \cdot 0{,}8\ ^{\text{г}}/_{\text{см}^3} - 2 \cdot 1\ ^{\text{г}}/_{\text{см}^3}}{5}\right) \cdot 1\ \text{л} = 80\ \text{г} \tag{16}$$

Ответ: масса поршня должна быть равна 80 г.

Если спрашивают переливается ли масло – да.

- **1 балл** — Записано равенство давлений для начальной ситуации на любом уровне. Или как-либо иначе определено соотношение высот (10).
- **1 балл** — При переливании масла объём жидкостей сохраняется.
- **1 балл** — Записано равенство давлений в любой точке для ситуации с поршнем.
- **1 балл** — Правильный ответ.

Задача 4. Путь тени

Поймём, как двигается тень. Для этого закрепим фонарь в некоторой точке столба, но выше верхней точки траектории снежка, иначе тень уйдёт на бесконечность. Будем отмечать положения тени при различных положенииях снежка. Заметим, что сначала тень двигается от столба, а затем к нему. Точке разворота соответствует момент, когда снежок летит прямо на фонарь, т.е. когда лучи света идут по касательной к траектории снежка.

Пусть H — высота столба, h — максимальная высота подъёма снежка, L — дальность полета снежка, а l — путь тени при её движении от столба. Путь тени тогда складывается из двух частей:

$$s = L + 2l. \tag{17}$$

По условию:

$$\frac{L}{s} = \frac{h}{H} = \frac{2{,}5\ \text{м}}{5\ \text{м}} = \frac{1}{2}. \tag{18}$$

Подставляем (17) и находим l:

$$\frac{L}{L+2l} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 2L = L + 2l \quad \Rightarrow \quad l = \frac{L}{2} = \frac{5\ \text{м}}{2} = 2{,}5\ \text{м}. \tag{19}$$

Отмечаем точку разворота тени на расстоянии l справа от точки броска и проводим через неё касательную к траектории снежка. Касательная пересечёт столб в точке крепления фонаря. Получим, что высота крепления фонаря равна 4 м. добавить слов

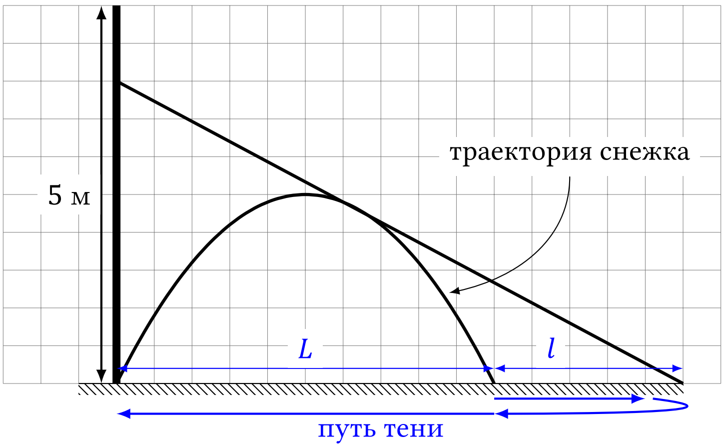


Рис. 5: Построение положения лампы.

Ответ: фонарь находится на высоте 4 м от земли.

- **2 балла** — Описан характер движения тени. Сначала вправо, потом влево.
- **1 балл** — Найдена точка, с максимальным удалением от столба.
- **1 балл** — Построено положение лампы на фонаре.

Задача 5. Ледовая арена

Пусть исходно был ковёр толщины d. По условию, при достижении температуры в помещении $t_1 = 15°C$, лёд под ковром начал таять, а значит в этот момент его температура достигла $t_0 = 0°C$. Мощность потока тепла через ковёр (толщины d) пропорциональна разности температур на поверхностях. Пусть коэффициент пропорциональности равен α, тогда мощность потока выражается как

$$P = \alpha \Delta t_1 = \alpha(t_1 - t_0). \tag{20}$$

Посмотрим, как изменится разность температур между верхней и нижней поверхностью ковра, если увеличить его толщину в k раз, а поток оставить таким же. Мысленно разделим новый «толстый» ковёр на k слоёв. Каждый такой слой будет иметь толщину d и коэффициент α. Заметим, что любой слой ковра пропускает фиксированный поток тепла P, иначе температура бы менялась и равновесия бы не было.

Таким образом, чтобы мощность осталась фиксированной, каждый из k слоёв должен пропускать поток P, а значит разность температур на его границах должна быть $\Delta t_1 = 15°C$. Учитывая, что в новом ковре таких слоёв k, разность температур поверхностей ковра будет равна

$$\Delta t_2 = k \Delta t_1. \tag{21}$$

Минимальная толщина ковра будет при условии, что разность температур между границами минимальна. Так как в помещении температура должна быть $t_2 = 20°C$, а у льда температура может быть не больше, чем $t_0 = 0°C$, то минимальная $\Delta t_2 = t_2 - t_0$.

Теперь можно найти, во сколько раз толще должен быть ковер:

$$k = \frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} = \frac{20°C}{15°C} = \frac{4}{3}. \tag{22}$$

Заметим, что получилось нецелое число. Эту проблему можно решить так: разделить исходный ковер на 3 слоя, на каждом из который температура будет падать на 5°C, а потом мысленно положить 4 слоя толщины $d/3$.

Ответ: нужно увеличить толщину ковра в $4/3$ раз.

- **2 балла** — Определена максимальная разность температур, которую может выдержать ковёр.
- **4 балла** — Указано, что, если ковёр станет толще в k раз, он будет допускать разность температур $k \cdot \Delta t_1$. Или сразу отношение.
- **2 балла** — Ответ.

Задача 6. О, капитан, мой капитан

Первым делом надо восстановить оси на графике зависимости расхода (Q) от времени (t). В каждый момент расход топлива известен, значит любая прямая параллельная оси Q не может пересекать график более одного раза. Действительно, если бы это было не так, то для некоторого времени t невозможно было бы определить значение расхода. Аналогично можно заметить, что раз при движении расход не убывал, любая прямая, параллельная оси времени тоже пересекает график зависимости $Q(t)$ не более чем в одной точке.

Теперь попробуем расположить оси так, чтобы они удовлетворяли сформулированным условиям. В условии сказано, что график состоит из четвертей окружности, поэтому такого можно достичь единственным образом.

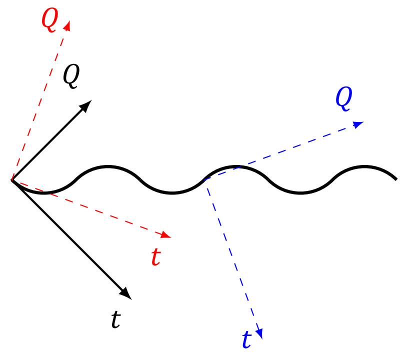


Рис. 6: Восстановление направления осей

Если хотя бы немного повернуть оси против часовой стрелки, то ось времени сама по себе пересечёт график второй раз (красные оси на рисунке 6). Если же повернуть по часовой стрелке — расход в точках графика, где кончается первая, третья или пятая четверть окружности будет не определён (синие оси на рисунке 6).

После того, как направления осей восстановлены, осталось только определить положение нуля. Количество топлива, которое было потрачено за некоторый промежуток времени, можно посчитать как площадь под графиком зависимости расхода от времени. Чтобы это сделать нарисуем оси в «привычном» виде (рис. 7)

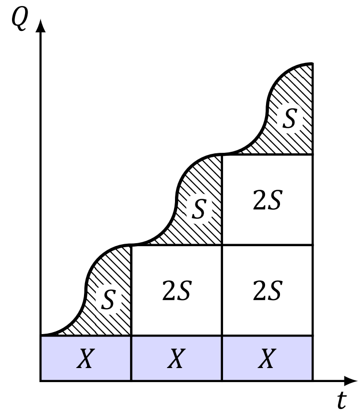


Рис. 7: График зависимости расхода топлива от времени

Пускай площадь каждого кусочка из двух четвертинок окружности равна S (штрихованные участки на рисунке 7), тогда площадь «квадратов» (не штрихованные участки на рисунке 7) равна $2S$ (из двух штрихованных можно собрать «квадрат»). Осталось три участка, которые характеризуют положение графика относительно нуля. Пускай площадь каждого из них равняется X, тогда общий расход равен

$$Q_{\text{общ.}} = 3 \cdot S + 3 \cdot 2S + 3 \cdot X = 9S + 3X. \tag{23}$$

В условии сказано, что за первую треть времени была сожжена шестая часть израсходованного топлива,

поэтому
$$\frac{S+X}{9S+3X}=\frac{1}{6}, \tag{24}$$
откуда несложно найти X:
$$X=S. \tag{25}$$
Тогда за последнюю треть времени было потрачено
$$\frac{5S+X}{9S+3X}=\frac{6S}{12S}=\frac{1}{2}, \tag{26}$$
то есть половина всего израсходованного топлива.

Ответ: За последнюю треть времени была сожжена половина топлива.

- **1 балл** — Переформулировка условия монотонности графика (либо однозначного определения расхода в зависимости от времени) в то, что прямые параллельные осям не должны пересекать его больше, чем в одной точке.
- **3 балла** — Правильно восстановлено направление осей.
- **2 балла** — Идея о том, что ноль по оси Q находится не в начале кривой.
- **2 балла** — Ответ

Задача 7. Курсор

Скорость и перемещения связаны между собой как

$$\vec{s} = \vec{v} \cdot t, \tag{27}$$

поэтому дальше будем рассуждать в терминах скоростей. Скорость, которую сообщает курсору тачпад, направлена горизонтально вправо и равна $v_т$. Скорость курсора под действием мыши и тачпада направлена к иконке Б и равна $v_{м+т}$.

Чтобы понять, как складываются скорости курсора от мыши и тачпада, рассмотрим его перемещение за некоторый промежуток времени, например 2 с (см. рис. 8). С одной стороны, курсор переместился на 17 кл. по направлению к иконке Б в точку Б' (на 15 кл. по горизонтали и на 8 кл. по вертикали). С другой стороны, это перемещение можно разложить на отдельные части: перемещение от мыши и перемещение от тачпада. Перемещение от тачпада составляет 21 кл. по горизонтали в точку А. Значит за 2 с мышь должна переместить курсор из точки А в точку Б'. Тогда скорость, которую сообщает курсору мышь, равна $v_м$ (см. рис. 8)

Теперь отложим эту скорость от начального положения курсора и увидим, что под действием только мыши курсор бы дошёл до иконки В. Видно, что иконка оказалась ровно посередине перемещения, которое вызвано работой мыши, поэтому для того, чтобы её достичь потребуется половина времени, в терминах которого мы рисовали вектора. Таким образом курсор окажется на иконке В через 1 с.

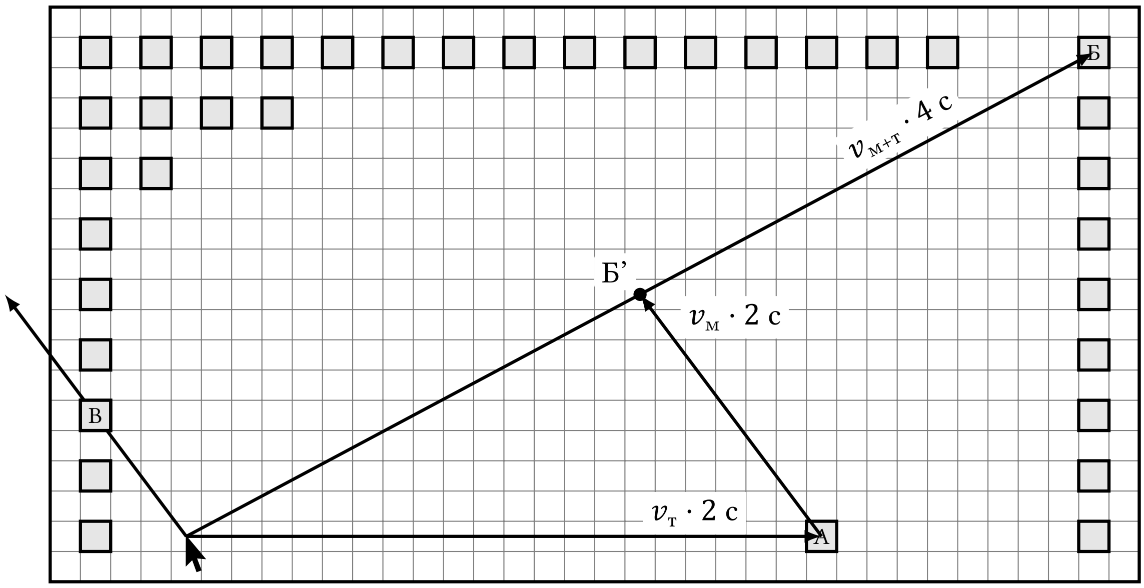


Рис. 8: Построения

<u>Ответ:</u> курсор дойдёт до иконки В (см. рис. 8) за 1 с.

- **4 балла** — Найдено направление скорости мыши.
- **2 балла** — Верное определение иконки, в которую привело бы использование только мыши.
- **2 балла** — Найдено время, которое потребуется, чтобы дойти до иконки В.