Городской тур 2017/18. 11 класс

Задача 1

Новое чудо-оружие повстанцев уничтожило Звезду Смерти массой M, сообщив ей заряд Q и превратив затем в сферически симметричное однородное пылевое облако радиуса R_0. С какой максимальной скоростью будут налетать пылевые остатки Звезды на торжествующих повстанцев, истребитель которых дрейфует на расстоянии $s > R_0$ от центра облака? Частицы, на которые распались враги, малы, одинаковы по массе и заряду и покоятся непосредственно после распада. Драма произошла вдали от посторонних космических тел; излучением пренебречь.

Решение.

Обозначим массу одной пылинки m, заряд q. Пусть искомая скорость равна V.

По условию все пылинки одинаковые, поэтому $q/m = Q/M$. Пылинки будут взаимодействовать по закону Кулона (отталкиваться) и по закону гравитации (притягиваться). Будем считать, что отталкивание более существенно, потому что в противном случае облако будет сжиматься и пылинки вообще не долетят до корабля повстанцев.

В силу симметрии облако пыли будет всегда оставаться шарообразным. Рассмотрим силы, действующие на какую-то одну пылинку, находящуюся на расстоянии x от центра облака. Все пылинки, расположенные дальше от центра, чем рассматриваемая, не будут создавать сил, влияющих на движение выбранной пылинки. Наоборот, пылинки, расположенные ближе центру, чем выбранная, образуют шар, зарядом Q_x и массой M_x, который действует на рассматриваемую пылинку **также, как если бы весь заряд и масса этого шара были сосредоточены в центре облака**. Этот известный результат – прямое следствие теоремы Гаусса, но может быть доказан и непосредственным рассмотрением сил, действующих на частицу внутри или снаружи заряженной (или массивной) сферы. Обратите внимание, для вычисления ускорения любой выбранной пылинки важно лишь какой суммарный заряд Q_x и массу M_x имеют пылинки, расположенные ближе нее к центру облака. Ускорение пылинки при этом

$$a = \frac{F}{m} = \frac{kQ_x q - GM_x m}{mx^2}, \qquad Q_x = \frac{Qx^3}{R_0^3}, \qquad M_x = \frac{Mx^3}{R_0^3}.$$

Так как Q_x и M_x пропорциональны x^3, $a \sim x$. Это значит, пылинки с меньшим x будут иметь меньшее ускорение, чем те, что ближе к границе облака. Значит, меньше у них будет и набранная скорость, так что **слои облака не будут перемешиваться в процессе движения** – величина Q_x и M_x будут оставаться для данной пылинки неизменными в процессе расширения облака.

Запишем закон сохранения энергии для пылинки, первоначально находившейся на расстоянии x от центра облака. В начальный момент потенциальная энергия электрического поля равна kqQ_x/x – при вычислении этой энергии мы мысленно стянули внутренний шар в центральную точку облака и воспользовались формулой энергии точечных зарядов. Аналогично гравитационная потенциальная энергия пылинки в начальный момент равна $-GmM_x/x$. По сравнению с электростатической формулой знак минус означает, что в отличие от ситуации с зарядами тела с массами одного знака притягиваются. Полная энергия пылинки в начальный момент $(kqQ_x - GmM_x)/x$. В момент, когда пылинка оказалась около корабля, ее потенциальная энергия пылинки считается также, с заменой x на s. Энергия пылинки при ее движении сохраняется:

$$\frac{kqQ_x - GmM_x}{x} = \frac{mV^2}{2} + \frac{kqQ_x - GmM_x}{s}.$$

Выразим отсюда V^2 – квадрат скорости пылинки около корабля, воспользоваться выражением для Q_x и M_x, а также соотношением $q/m = Q/M$:

$$V^2 = \frac{2(kqQ_x - GmM_x)}{m}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{s}\right) = \frac{2(kqQ - GmM)}{mR_0^3}\left(x^2 - \frac{x^3}{s}\right) = \frac{2(kQ^2 - GM^2)}{MR_0^3}\left(x^2 - \frac{x^3}{s}\right). \tag{1}$$

Чтобы выяснить, при каком начальном положении пылинки x она будет иметь максимальную скорость около корабля, исследуем выражение в скобках на максимум. Для этого приравняем нулю производную по x от выражения в скобках:

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 - \frac{x^3}{s}\right) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 2x - \frac{3x^2}{s} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \frac{2s}{3}.$$

Итак, мы получили неожиданный результат: наиболее быстрыми около корабля окажутся пылинки, которые первоначально располагались на расстоянии $x = 2s/3$ от центра облака. Разумеется, это верно только если в этом месте пылинки вообще были, то есть если $R_0 \geq 2s/3$. Ответ при этом получается подстановкой $x = 2s/3$ в (1):

$$V = \sqrt{\frac{8(kQ^2 - GM^2)s^2}{27MR_0^3}}. \tag{2}$$

Если же в начальный момент облако меньше, чем $2s/3$, самая быстрая пылинка – та, которая в начальный момент расположена на границе облака, то есть при $x = R_0$. Подставляя $x = R_0$ в (1), получим

$$V = \sqrt{\frac{2(kQ^2 - GM^2)}{M}\frac{(s - R_0)}{sR_0}}. \qquad (3)$$

<u>Ответ</u>: При $R_0 \geq 2s/3$ ответ дается формулой (2). При $R_0 < 2s/3$ ответ дается формулой (3). При $kQ^2 < GM^2$ облако будет сжиматься, и пылинки не попадут в повстанцев.

Задача 2

Рационализатор решил обогревать свой дом с помощью теплового насоса, в котором идеальный одноатомный газ используется в следующем процессе. Сначала газ, имеющий уличную температуру и атмосферное давление, теплоизолируют и сжимают адиабатически до состояния, когда его температура оказывается равной $t = 60°$C. Затем газ приводят в тепловой контакт с домом, и он изохорически остывает до температуры в доме. Затем газ снова теплоизолируют и позволяют ему адиабатически расширяться, пока его давление не сравняется с атмосферным. Наконец, газ приводят в тепловой контакт с улицей, и он изобарически приобретает уличную температуру. Цикл повторяют с постоянной частотой; работа, совершаемая над газом, осуществляется самим рационализатором в ходе спортивных тренировок. Теплота, уходящая из дома на улицу, пропорциональна разности температур в доме и на улице. Когда на улице $t_0 = 0°$C, в доме рационализатора $t_1 = 20°$C. Какой стала температура t_1' в доме, если температура на улице поднялась до $t_0' = 6°$C? Во сколько раз изменилась при этом суммарная работа, совершаемая внешними силами над газом за один цикл, если минимальная температура газа в цикле до изменения погоды была $t_x = -20.2°$ C, а после изменения погоды стала $t_x' = -12.5°$C?

Решение.

Изобразим на диаграмме $p(V)$ циклический процесс, в котором участвует газ (см. рис. 1). Участки a-b и c-d представляют собой адиабаты, на которых газ не обменивается теплотой с окружающими телами. На участке b-c газ отдает в дом теплоту $Q_{дом}$ в изохорическом процессе. На участке d-a газ нагревается, получая тепло $Q_{ул}$ с улицы.

Пусть сначала на улице t_0, в доме t_1. При этом по условию $t_a = t_0$, $t_b = t$ (максимальная температура газа в цикле), $t_c = t_1$, $t_d = t_x$.

Теплота, поступающая в дом $Q_{дом} = C_V(t_b - t_c)$, где C_V – изохорическая теплоемкость используемого газа, а $t_b - t_c = t - t_1$ – то, на сколько градусов остыл газ, отдавая теплоту в дом. Чтобы температура в доме не менялась, поступающая в дом теплота от газа должна быть в точности равна теплоте $Q_{потери}$, которая утекает из дома на улицу. Последняя по условию пропорциональна $t_1 - t_0$; обозначим коэффициент пропорциональности α. Получим

$$Q_{дом} = Q_{потери} \qquad \Leftrightarrow \qquad C_V(t - t_1) = \alpha(t_1 - t_0).$$

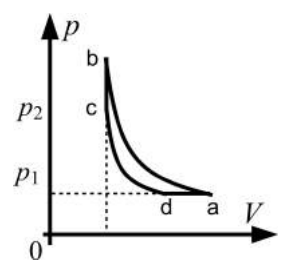


Рис. 1:

Запишем такое же равенство, когда температура на улице вместо t_0 стала равна t_0', а температура в доме вместо t_1 стала t_1': $C_V(t - t_1') = \alpha(t_1' - t_0')$.

Разделив эти уравнения друг на друга почленно, получим

$$\frac{t - t_1}{t - t_1'} = \frac{t_1 - t_0}{t_1' - t_0'} \qquad \Leftrightarrow \qquad t_1' = \frac{t(t_1 - t_0) + t_0'(t - t_1)}{t - t_0} = 24°\text{C}.$$

В рассматриваемом цикле газ совершает отрицательную работу $A < 0$. Значит рационализатор совершает *над газом* положительную работу $|A|$. По закону сохранения энергии $|A| = Q_{дом} - Q_{ул}$. Действительно, теплота, поступающая от газа в дом, берется с улицы и из работы рационализатора.

Запишем работу рационализатора, когда на улице t_0. Выражение для $Q_{дом}$ мы уже нашли: $Q_{дом} = C_V(t - t_1)$. Аналогично можно записать $Q_{ул} = C_p(t_a - t_d) = C_p(t_0 - t_x)$. Здесь мы ввели теплоемкость используемого газа в изобарическом процессе C_p, а для температуры t_d использовали, что она соответствует самой холодной точке цикла t_x. Выразим работу $|A|$:

$$|A| = Q_{дом} - Q_{ул} = C_V(t - t_1) - C_p(t_0 - t_x).$$

Когда погода изменилась, изменилась и работа:

$$|A'| = C_V(t - t_1') - C_p(t_0' - t_x'),$$

здесь t_x' – новая температура в самой холодной точке d. Разделив $|A'|$ на $|A|$, получим

$$k = \frac{|A'|}{|A|} = \frac{C_V(t - t_1') - C_p(t_0' - t_x')}{C_V(t - t_1) - C_p(t_0 - t_x)}.$$

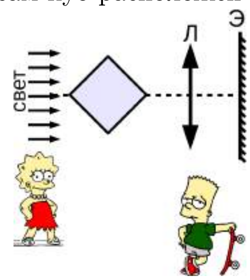
Разделим числитель и знаменатель на C_V, учтем, что C_p/C_V для одноатомного газа равно 5/3. Получим

$$k = \frac{3(t - t_1') - 5(t_0' - t_x')}{3(t - t_1) - 5(t_0 - t_x)} \simeq 0.816.$$

Ответ: Температура в доме станет 24° С. Работа изменится примерно в 0.8 раза.

Задача 3

Лиза осветила прозрачный куб параллельным пучком света. Затем свет был пропущен через собирающую линзу Л с фокусным расстоянием F и попал на экран Э (см. рис). На экране Лиза наблюдала три ярких точки, лежащих на одной прямой; расстояние между соседними точками равно a. Чему равен коэффициент преломления куба Лизы? Барт повторил эксперимент Лизы, оставив на месте линзу и экран, но использовав куб из другого прозрачного материала. Почему-то Барт не увидел на экране трех ярких точек. Что же он увидел на экране? Что можно сказать о коэффициенте преломления куба у Барта? В опытах Лизы и Барта две грани куба параллельны плоскости рисунка, а сам куб расположен симметрично относительно главной оптической оси линзы.



Решение.

Обозначим через n коэффициент преломления материала куба. Рассмотрим ход лучей через куб. Падая под углом $\alpha = 45°$ (см. рис. 2), луч преломляется под углом β, таким что по закону преломления

$$\sin\alpha = n\sin\beta \qquad \Leftrightarrow \qquad \sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n} = \frac{1}{\sqrt{2}n}, \qquad \cos\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{2n^2}}. \tag{4}$$

Далее он попадает на противоположную сторону куба и выходит из него снова под углом α. В итоге луч проходит сквозь куб словно через плоскопараллельную пластину – в результате двух преломлений он просто смещается, сохранив направление.

Таким образом идут все лучи, попадающие на куб не слишком далеко от точки A. Лучи, попадающие на поверхность куба между точками B и B′ (см. рис. 3) выходят с противоположной стороны параллельным пучком.

Легко понять, что есть лучи, которые попадают на куб вне интервала между точками B и B′. Они после первого преломления попадут не на противоположную грань куба, а на соседнюю (см. рис. 4). При втором преломлении они могут испытать или не испытать полное внутреннее отражение.

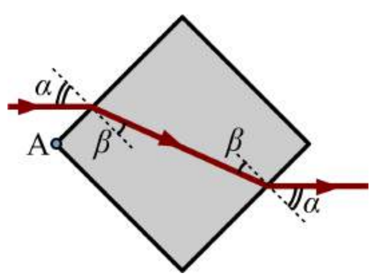


Рис. 2:

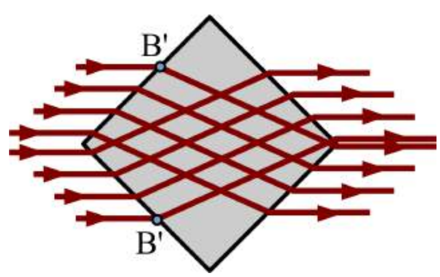


Рис. 3:

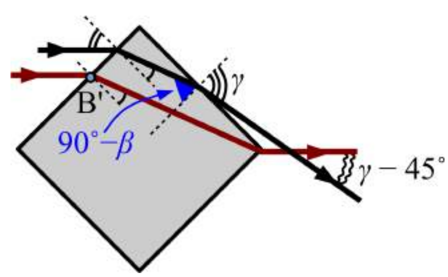


Рис. 4:

Случай на рис. 4 соответствует ситуации, когда полного внутреннего отражения не наступило. Луч попал на вторую грань под углом $90° - \beta$, а вышел из куба под углом γ, для которого справедлив закон преломления:

$$n\sin(90° - \beta) = \sin\gamma \qquad \Leftrightarrow \qquad \sin\gamma = n\cos\beta = n\sqrt{1 - \frac{1}{2n^2}}. \tag{5}$$

В последнем равенстве мы использовали (4).

Таким образом можем заключить, что в этом случае за кубом свет будет распространяться тремя пучками (см. рис. 5): один пучок идет параллельно исходно падающему свету, и два других наклонены к нему симметрично под углом $\gamma - 45°$. Собирающая линза соберет каждый из этих пучков в точку. Очевидно, это точки, которые наблюдает Лиза. Пучок, идущий параллельно главной оптической оси, линза соберет в фокусе f, два остальных пучка – в точках X и Y, расположенных в фокальной плоскости (см. рис. 6).

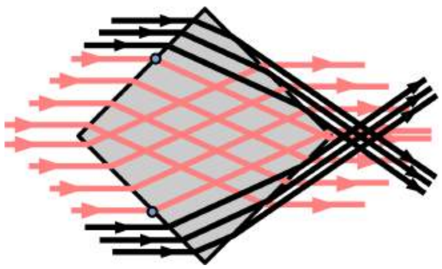


Рис. 5:

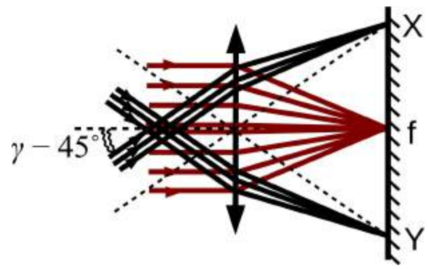


Рис. 6:

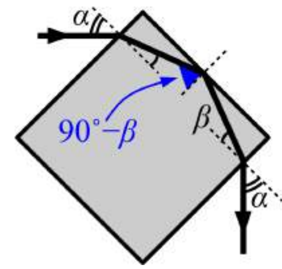


Рис. 7:

Чтобы определить положение точки X, в которую попадает после линзы пучок, идущий после куба под углом $\gamma - 45°$ вверх, нужно рассмотреть луч, который попадает в линзу параллельно этому пучку и проходит через центр линзы. Такой луч изображен на рис. 6 пунктиром. Обозначим центр линзы через O. Тогда Of$= F$, угол $\angle XOf = \gamma - 45°$, Xf$= a$. Зная по условию a и F, легко найти

$$\operatorname{tg}(\gamma - 45°) = \frac{a}{F} \qquad \Leftrightarrow \qquad \gamma = \operatorname{arctg}(a/F) + 45°.$$

Это позволяет нам найти $\sin\gamma = \sin(\operatorname{arctg}(a/F) + 45°)$ и выразить через него n с помощью (5):

$$\sin\gamma = \sqrt{n^2 - \frac{1}{2}} \qquad \Leftrightarrow \qquad n = \sqrt{\sin^2\gamma + \frac{1}{2}}.$$

Рассмотрим второй случай, когда боковые пучки света испытали полное внутреннее отражение. Несложно видеть (см. рис. 7), что отразившить от внутренней грани, луч выйдет под углом 90° к главной оптической оси линзы. На рис. 8 представлено изображение трех пучков после прохождения куба. Понятно, что лишь центральный пучок попадет на линзу и образует на экране светящуюся точку. Значит Барт увидит на экране одну светящуюся точку в фокусе линзы.

Единственное, что мы можем сказать про куб Барта, – это то, что в опыте произошло полное внутненнее отражение, то есть

$$n\sin(90° - \beta) \geq 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad n\cos\beta \geq 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \sqrt{n^2 - \frac{1}{2}} \geq 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad n \geq \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

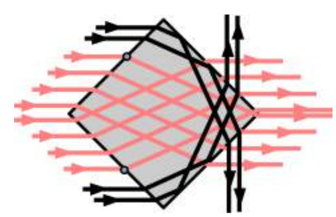


Рис. 8:

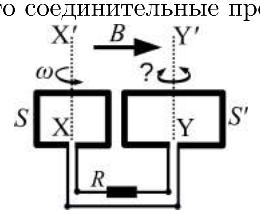
Ответ: У Лизы куб имеет коэффициент преломления

$$n = \sqrt{\sin^2\gamma + \frac{1}{2}}, \qquad \text{где} \quad \gamma = \operatorname{arctg}(a/F) + 45°,$$

очевидно, что эта величина меньше, чем $\sqrt{3/2}$. У Барта куб имеет коэффициент преломления больше, чем $\sqrt{3/2}$.

Задача 4

Проволочная рамка площадью S может свободно вращаться вокруг вертикальной оси XX′, а вторая рамка площадью $S' > S$ – вокруг оси YY′. Рамки соединили проводами, электрическая схема соединения показана на рисунке. Включив однородное магнитное поле B, параллельное плоскостям обеих рамок, первую рамку начали вращать с постоянной угловой скоростью ω. Оказалось, что вторая рамка при этом тоже движется. По какому закону меняется её угол поворота относительно оси YY′? Постройте качественный график полученной зависимости. Массой рамок и трением в системе пренебречь. Считайте, что скользящие контакты на проводах, соединяющих рамки, устроены так, что соединительные провода не перепутываются при движении рамок.



Решение.

При движении первой рамки магнитный поток через нее меняется по закону $\Phi_1(t) = BS\sin(\omega t)$. Если бы вторая рамка была неподвижна , магнитный поток через нее $\Phi_2(t)$ был бы постоянен. При этом в контуре, образованном двумя рамками образовалась бы ЭДС индукции $\mathscr{E}(t)$ и соответствующий ей ток $I(t)$, определяющиеся скоростью изменения магнитного потока:

$$\mathscr{E}(t) = -\left(\frac{\Delta\Phi_1}{\Delta t} + \frac{\Delta\Phi_2}{\Delta t}\right) = -\frac{\Delta\Phi_1}{\Delta t} = -BS\omega\cos\omega t, \qquad I(t) = \frac{\mathscr{E}(t)}{R}.$$

Этот ток, протекая через вторую рамку, привел бы к возникновению силы Ампера, пропорциональной $I(t)$.

На самом деле вторая рамка не закреплена, так что под действием сколь угодно малой силы Ампера она бесконечно легко сдвигается. При этом изменение потока в контуре двух рамок определяется суммой изменения потоков в обеих рамках. Благодаря пренебрежимой массе своим движением вторая рамка полностью скомпенсирует изменение магнитного потока, создаваемого первой рамкой. Действительно, в противном случае через контур потек бы ненулевой ток, это привело бы к наличию не малой силы Ампера; при нулевой массе второй рамки это привело бы к её движению с бесконечным ускорением.

Поэтому вторая рамка будет препятствовать протеканию через схему конечного тока, и в любой момент магнитные потоки, проходящие через рамки, компенсируют друг друга, $\Phi = \Phi_1(t) + \Phi_2(t) = 0$, $\mathscr{E}(t) \to 0$, $I(t) \to 0$.

Будем считать, что первую рамку вращают в направлении, показанном стрелкой на картинке к условию. Можно доказать, воспользовавшись правилом Ленца, что ток, возникающий в начальный момент в системе из-за такого движения первой рамки, направлен по часовой стрелке (чтобы магнитное поле этого тока компенсировало начальное увеличение $\Phi_1(t)$). Сила Ампера, действующая при этом на вторую рамку, поворачивает её в сторону, противоположную той, в которую вращается первая рамка.

Итак, обе рамки будут вращаться в противоположные стороны так, чтобы суммарное изменение магнитного потока в контуре обеих рамок было равно нулю. Данный физический принцип лежит в основе устройства, называющегося *сельсин*. Сельсин позволяет синхронизировать удаленные механические конструкции посредством электромагнетизма.

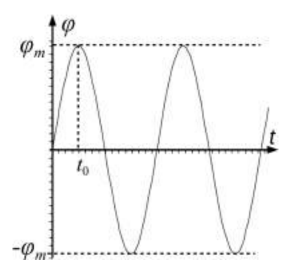


Рис. 9:

Обозначим угол, под которым вторая рамка повернулась из начального положения через $\varphi(t)$. Будем отсчитывать этот угол в сторону, противоположную вращению первой рамки. Тогда компенсация магнитных потоков записывается в виде

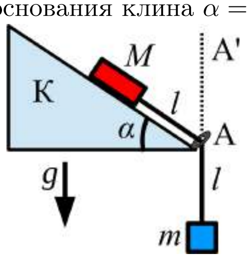
$$BS'\sin\varphi(t) = BS\sin(\omega t) \qquad \Leftrightarrow \qquad \varphi(t) = \arcsin\left(\frac{S\sin(\omega t)}{S'}\right). \tag{6}$$

Заметьте: к моменту, когда синус в правой части обратился в единицу (а первая рамка повернулась из начального положения на $\pi/2$), выражение под арксинусом еще меньше единицы, ведь $S/S' < 1$ по условию. Значит, вторая рамка повернулась лишь на угол $\varphi_m = \arcsin(S/S') < \pi/2$. Далее поток через первую рамку начинает уменьшаться, а значит должен уменьшаться и поток через вторую рамку. Поэтому начиная с момента $t_0 = \pi(2/\omega)$ вторая рамка начнет поворачиваться в обратную сторону.

<u>Ответ</u>: Угол поворота второй рамки определяется зависимостью (6). График приведен на рис. 9.

Задача 5.

Система, изображенная на рисунке, состоит из двух грузов, связанных нитью длиной $2l$, и неподвижного клина К, на котором закреплено маленькое скользкое колечко А. Первоначально грузы находятся в равновесии, груз массой M лежит на клине, а груз массой m висит на нити. Нить продета в колечко. Коэффициент трения груза о клин $\mu = 1$, середина нити касается колечка. Клин стали вращать с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси АА$'$. Известно, что при вращении груз M остался неподвижным относительно клина. При каком m/M это возможно? Угол у основания клина $\alpha = 30°$. Ускорение свободного падения g. Размерами грузов пренебречь.



Решение.

По условию пока система не вращается, сила трения гарантированно достаточно велика, чтобы удержать тела от скатывания вниз. Запишем это условие.

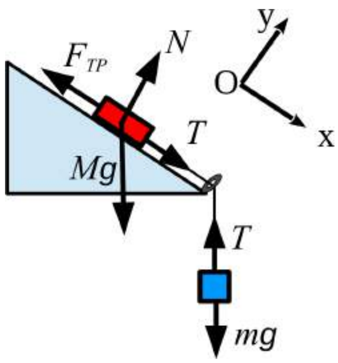


Рис. 10:

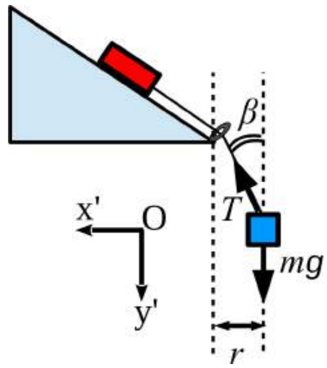


Рис. 11:

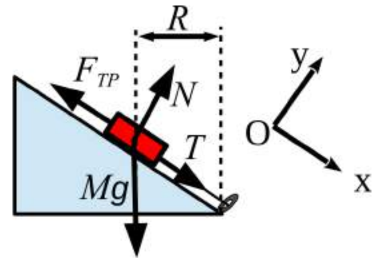


Рис. 12:

Так как нижнее тело висит неподвижно, натяжение нити $T = mg$. Для второго тела в проекции на оси Ох и Оу условие равновесия имеет вид (см. рис. 10)

$$\text{Oy}: \qquad N = Mg\cos\alpha, \qquad\qquad \text{Ox}: \qquad Mg\sin\alpha + T = F_{\text{тр}} \le \mu N.$$

Подставляя в последнее неравенство N и T, а также значения $\sin\alpha = 1/2$, $\cos\alpha = \sqrt{3}/2$, $\mu = 1$, получим

$$\frac{Mg}{2} + mg \le \frac{\sqrt{3}Mg}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \frac{m}{M} \le \frac{\sqrt{3}-1}{2}. \tag{7}$$

Это условие выполняется по условию задачи.

Если систему раскрутить достаточно быстро, висящий груз m будет отклоняться от вертикали, описывая круги радиуса $r = l\sin\beta$ (см. рис. 11). При этом с ростом ω натяжние нити будет возрастать. Запишем условие движения груза массой m по окружности: в проекции на направление к центру окружности тело имеет ускорение $\omega^2 r$:

$$\text{Ox}': \qquad m\omega^2 r = T\sin\beta \qquad \Leftrightarrow \qquad m\omega^2 l\sin\beta = T\sin\beta \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{при } \beta \ne 0 \qquad T = m\omega^2 l.$$

Мы получили совершенно отличное выражение от $T = mg$ – натяжения в случае невращающейся системы. Понятно, что при постепенном увеличении ω с нулевого значения формула $T = mg$ должна превращаться в $T = m\omega^2 l$ постепенно. Почему же мы получили, что T скачком меняется, если начать вращать систему?

Давайте найдем угол β, под которым нить висящего тела отклонится от вертикали. Для этого используем равновесие тела массой m в проекции на вертикальную ось:

$$\text{Oy}': \qquad mg = T\cos\beta \qquad \Leftrightarrow \qquad \cos\beta = \frac{mg}{T} = \frac{mg}{m\omega^2 l} = \frac{g}{\omega^2 l}.$$

Это решение существует только при $g/(\omega^2 l) \le 1$, т.е. при $\omega \ge \omega_0 = \sqrt{g/l}$. Только в этом случае висящий груз может отклоняться от вертикали. Если же $\omega < \omega_0$, нить, на которой висит тело m будет вертикальна, и $T = mg$. Заметим, что при $\omega = \omega_0$ натяжение $T = mg = m\omega_0^2 l$.

Стоит затронуть вопрос, почему висящее тело не будет всегда оставаться на оси вращения, ведь для него, фактически, существуют два положения равновесия. Несложно догадаться, что при появлении второго, отклоненного от вертикали положения равновесия, вертикальное положение становится неустойчивым. При любом случайном отклонении от вертикали груз будет отброшен в отклоненное положение равновесия центробежной силой.

Запишем условие движения тела M по окружности радиуса $R = l\cos\alpha$ (см. рис. 12). В проекции на горизонтальную ось (направление к центру врещения) тело имеет ускорение $\omega^2 R = \omega^2 l\cos\alpha$. Нам неизвестно направление силы трения; предположим, что она направлена вверх по наклонной плоскости (как изображено на рис. 12). Уравнение движения тела M:

$$\text{Oy}: \qquad N = Mg\cos\alpha + M\omega^2 l\cos\alpha\sin\alpha, \qquad\qquad \text{Ox}: \qquad F_{\text{тр}} = T + Mg\sin\alpha - M\omega^2 l\cos^2\alpha. \tag{8}$$

Случай 1: $\omega < \omega_0$, нить вертикальна, $T = mg$.

Тело не поедет по плоскости, если $F_{\text{тр}} \le \mu N$. Из (8) заключаем, что это верно когда

$$F_{\text{тр}} = T + Mg\sin\alpha - M\omega^2 l\cos^2\alpha \le \mu(Mg\cos\alpha + M\omega^2 l\cos\alpha\sin\alpha).$$

Подставляя сюда $T = mg$, $\mu = 1$, $\alpha = 30^\circ$, получим неравенство

$$F_{\text{тр}} = mg + \frac{Mg}{2} - \frac{3M\omega^2 l}{4} \le \frac{\sqrt{3}Mg}{2} + \frac{\sqrt{3}M\omega^2 l}{4}.$$

Удобно вместо g пользоваться введенной ранее величиной ω_0^2 (ведь $g = \omega_0^2 l$), поэтому

$$F_{\text{тр}} = m\omega_0^2 l + \frac{M\omega_0^2 l}{2} - \frac{3M\omega^2 l}{4} \le \frac{\sqrt{3}M\omega_0^2 l}{2} + \frac{\sqrt{3}M\omega^2 l}{4}. \tag{9}$$

Это позволяет сократить l и выразить $x = m/M$:

$$m\omega_0^2 \le -\frac{M\omega_0^2}{2} + \frac{3M\omega^2}{4} + \frac{\sqrt{3}M\omega_0^2}{2} + \frac{\sqrt{3}M\omega^2}{4} \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \frac{m}{M} \le \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\frac{(3+\sqrt{3})}{4}.$$

Это более слабое условие, чем (7) при любом положительном ω^2, поэтому оно не накладывает никаких новых ограничений на свойства системы. Проверим, что сила трения действительно направлена вверх:

$$F_{\text{тр}} \ge 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad m\omega_0^2 l + \frac{M\omega_0^2 l}{2} - \frac{3M\omega^2 l}{4} \ge 0$$

Выразив $x = m/M$, выясним, когда найденное решение работает:

$$x \ge \frac{3\omega^2}{4\omega_0^2} - \frac{1}{2}.$$

Если это неравенство не выполняется, мы не угадали знак силы трения, и выражение (9) нужно исправить, изменив знаки всех слагаемых у силы трения:

$$F_{\text{тр}} = -m\omega_0^2 l - \frac{M\omega_0^2 l}{2} + \frac{3M\omega^2 l}{4} \le \frac{\sqrt{3}M\omega_0^2 l}{2} + \frac{\sqrt{3}M\omega^2 l}{4}.$$

Снова сократим неравенство на l и выразим x:

$$-\frac{M\omega_0^2}{2} + \frac{3M\omega^2}{4} - \frac{\sqrt{3}M\omega_0^2}{2} - \frac{\sqrt{3}M\omega^2}{4} \le m\omega_0^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\frac{(3-\sqrt{3})}{4} - \frac{1+\sqrt{3}}{2} \le x.$$

При $\omega \le \omega_0$ левая часть всегда отрицательна, т.е. неравенство всегда выполняется.

Итак, в первом случае куда бы ни была направлена сила трения, система не поедет, если она не ехала изначально, то есть при выполнении условия (7).

Случай 2: $\omega > \omega_0$, нить отклонилась на угол β, $T = m\omega^2 l$.

Пусть сила трения снова направлена вверх по плоскости. Снова запишем $F_{\text{тр}} \le \mu N$, воспользовавшись (8), но взяв новое значение $T = m\omega^2 l$:

$$F_{\text{тр}} = m\omega^2 l + Mg\sin\alpha - M\omega^2 l\cos^2\alpha \le \mu(Mg\cos\alpha + M\omega^2 l\cos\alpha\sin\alpha).$$

Опять подставим $\mu = 1$, $\alpha = 30^\circ$ и $g = \omega_0^2 l$, получим

$$m\omega^2 + \frac{M\omega_0^2}{2} - \frac{3M\omega^2}{4} \le \frac{\sqrt{3}M\omega_0^2}{2} + \frac{\sqrt{3}M\omega^2}{4} \tag{10}$$

Отсюда несложно получить неравенство на $x = m/M$:

$$m\omega^2 \le -\frac{M\omega_0^2}{2} + \frac{3M\omega^2}{4} + \frac{\sqrt{3}M\omega_0^2}{2} + \frac{\sqrt{3}M\omega^2}{4} \qquad \Leftrightarrow \qquad x \le \frac{(\sqrt{3}-1)}{2}\frac{\omega_0^2}{\omega^2} + \frac{3+\sqrt{3}}{4}.$$

Это более слабое условие, чем (7) при любом положительном ω^2. Проверим, что сила трения действительно направлена вверх:

$$F_{\text{тр}} \ge 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad m\omega^2 l + \frac{M\omega_0^2 l}{2} - \frac{3M\omega^2 l}{4} \ge 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x \ge \frac{3}{4} - \frac{\omega_0^2}{2\omega^2}. \tag{11}$$

Если это условие не выполняется, нужно изменить знак силы трения в (10):

$$-m\omega^2 - \frac{M\omega_0^2}{2} + \frac{3M\omega^2}{4} \le \frac{\sqrt{3}M\omega_0^2}{2} + \frac{\sqrt{3}M\omega^2}{4} \qquad \Leftrightarrow \qquad -\frac{M\omega_0^2}{2} + \frac{3M\omega^2}{4} - \frac{\sqrt{3}M\omega_0^2}{2} - \frac{\sqrt{3}M\omega^2}{4} \le m\omega^2.$$

Это эквивалентно следующему условию на x

$$\frac{3-\sqrt{3}}{4}-\frac{(\sqrt{3}+1)}{2}\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\le x\le\frac{3}{4}-\frac{\omega_0^2}{2\omega^2}. \tag{12}$$

Левое неравенство – условие отсутствия проскальзывания, правое – условие того, что сила трения направлена вниз по плоскости. Интервал для x не пустой при любом ω.

Подведем итог для случая $\omega\ge\omega_0$. Чтобы сила трения была направлена вверх и система была в равновении, должно выполняться (11) и (7):

$$\frac{3}{4}-\frac{\omega_0^2}{2\omega^2}\le x\le\frac{\sqrt{3}-1}{2}. \tag{13}$$

Чтобы сила трения была направлена вниз и система была в равновении, должно выполняться (12) и (7):

$$\frac{3-\sqrt{3}}{4}-\frac{(\sqrt{3}+1)}{2}\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\le x\le\frac{3}{4}-\frac{\omega_0^2}{2\omega^2},\qquad x\le\frac{\sqrt{3}-1}{2}. \tag{14}$$

Оба выписанных интервала не пустые при любом ω. Система будет оставаться в равновесии, если выполнено хоть одно из условий (13, 14), то есть при

$$\frac{3-\sqrt{3}}{4}-\frac{(\sqrt{3}+1)}{2}\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\le x\le\frac{\sqrt{3}-1}{2}. \tag{15}$$

Левое неравенство нетривиально (не сводится к условию $x\ge 0$) при $\omega>\omega_{\text{кр}}$, где

$$\omega_{\text{кр}}^2=\frac{2(\sqrt{3}+1)}{3-\sqrt{3}}\omega_0^2.$$

При $\omega<\omega_{\text{кр}}$ неравенства (15) выполняются тривиально, то есть система останется в равновесии, если была нем до начала вращения.

Ответ: система находилась в равновесии до начала вращения, поэтому должно выполняться $m/M\le(\sqrt{3}-1)/2$. Если вращать ее не слишком быстро, с угловой скоростью $\omega\le\omega_{\text{кр}}$, где

$$\omega_{\text{кр}}^2=\frac{2(\sqrt{3}+1)}{3-\sqrt{3}}\omega_0^2,\qquad \omega_0^2=\frac{g}{l}$$

система останется в равновесии без дополнительных условий. При $\omega\ge\omega_{\text{кр}}$, система будет в равновесии только при выполнении дополнительного условия

$$\frac{3-\sqrt{3}}{4}-\frac{(\sqrt{3}+1)\omega_0^2}{2\omega^2}\le\frac{m}{M}.$$

Разбалловка задач 11 класса.

Задача 1 (всего 12 баллов).

A	Независимость ответа от N	**2 балла**
B	*При некоторых условиях V*_max от r_0=R_0	**1 балл**
C	ЗСЭ	**4 балла**
D	V_max=...	**1 балл**
E	Соотношение Q и M	**1 балл**
F	Полное решение	**3 балла**

Задача 2 (всего 10 баллов).

A	Тепловой баланс: $C_v(60\text{-}t_{дома})=\alpha(t_{дома}\text{-}t_{улицы})$	**3 балла**
B	Составлено уравнение для нахождения $t_{дома}$	**1 балл**
C	$t_{дома} = 24°C$	**1 балл**
D	Верно посчитана работа за цикл = $C_v(60\text{-}t_{дома})$ - $C_p(t_{улицы}\text{ -}t_{наинизшая})$	**3 балла**
	Суммарная работа посчитана неверно, но вычисляется слагаемое $C_v(60\text{-}t_{дома})$ и/или $C_p(t_{улицы}\text{ -}t_{наинизшая})$, по 1 баллу за каждое вычисленное слагаемое	1 или 2 балла
E	Ответ: работа изменилась в 0.816 раз или работа уменьшилась в 1.225 раз	**1 балл**

Задача 3 (всего 10 баллов).

A	Закон преломления верно записан на первой грани куба $\sin\alpha = n\sin\beta$	**2 балла**
B	Закон преломления верно записан на второй грани куба $n\sin(90°\text{-}\beta)= \sin\gamma$	**2 балла**
C	Верно связано расстояние *a* и угол, под которым свет выходит из куба tg $(\gamma\text{-}45°)=a/F$	**1 балл**
D	Верный ответ для куба Лизы $n=\sqrt{\sin^2\gamma+\frac{1}{2}}$ или $n=\sqrt{1+\frac{aF}{a^2+F^2}}$ или $n=\sqrt{\frac{3}{2}-\frac{(F-a)^2}{2(a^2+F^2)}}$	**2 балла**
E	Рассмотрение полного внутреннего отражения и верный ответ для куба Барта	**3 балла**
	Полное внутреннее отражение упомянуто, но ответа нет	1 балл

Задача 4 (всего 10 баллов).

A	Уравнение движения второй рамки	**2 балла**
B	Соотношение на потоки	**1 балл**
C	Решение для угла второй рамки как функции времени	**2 балла**
D	Адекватный график	**1 балл**
E	Качание второй рамки	**2 балла**
F	Без изломов	**1 балл**

Задача 5 (всего 10 баллов).

A	Неподвижность системы до вращения – x_0	**1 балл**
B	Два уравнения движения в случае вертикальной нити	**2 балла**
C	Ответ для малых частот	**1 балл**
D	Два уравнения движения в случае отклоненной нити	**2 балла**
E	Учет разного направления силы трения – еще два уравнения движения	**2 балла**
F	Полный ответ	**2 балла**