

Рис. 1:

## Городской тур 2017/18. 10 класс

### Задача 1.

Рассмотрим основные этапы движения фигуры. На Рис. 1(а) изображена фигура в процессе скольжения в сторону гвоздя. На Рис. 1(б) приведена фигура в момент, предшествующий столкновению. Наконец, на Рис. 1(в) показано вращение фигуры после того, как она наткнулась на гвоздь. Поскольку, согласно условию, фигура не может оторваться от гвоздя при вращении, мы не будем обсуждать силу реакции со стороны пола. В связи с этим, показаны только силы  $T$ , действующие на фигуру со стороны нити, а также сила тяжести  $Mg$ .

Рассмотрим сперва процесс поступательного движения фигуры до столкновения с гвоздем. Фигуру ускоряет горизонтальная сила  $T$ , которая сообщает ей постоянное ускорение,

$$T = Ma.$$

В результате, к моменту столкновения фигура приобретает скорость

$$v_0 = \sqrt{2Ra} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}.$$

Столкновение фигуры с гвоздем абсолютно неупругое, но нецентрально. Разложим скорость  $v_0$  поступательного движения центра масс фигуры  $O$  на две составляющие (см. Рис. 1(б)): скорость  $w_0$ , которая направлена вдоль прямой  $OG$ , проходящей через центр цилиндра и гвоздь, и скорость  $u_0$ , направленную перпендикулярно этой прямой. В результате неупругого столкновения составляющая скорости  $w_0$  полностью гасится, в то время как скорость  $u_0 = v_0/\sqrt{2}$  остается без изменения и определяет начальную скорость вращения центра масс фигуры  $O$  вокруг гвоздя  $\Gamma$ . В ходе столкновения на фигуру в течение очень малого интервала времени  $\Delta t$  действует очень большая сила  $F \sim 1/\Delta t$ , направленная вдоль прямой  $OG$  к центру масс. Эта сила гасит импульс вдоль  $OG$ ,  $Mw_0 = F\Delta t$ , но она не может изменить поперечный импульс  $Mu_0$ . Сила  $F$  направлена от гвоздя к центру масс, поскольку в противном случае, так как вся масса фигуры сосредоточена на оси, сила  $F$  раскрутила бы фигуру до бесконечно большой угловой скорости в системе отсчета центра масс. Отметим, что сохранение компоненты скорости  $u_0$  при ударе можно получить также из закона сохранения момента импульса относительно гвоздя  $\Gamma$ ,

$$\begin{aligned} L_{\text{до}} &= Mv_0R, \\ L_{\text{после}} &= Mu_0(\sqrt{2}R), \\ L_{\text{до}} &= L_{\text{после}} \Leftrightarrow v_0 = \sqrt{2}u_0. \end{aligned}$$

Итак, сразу после удара кинетическая энергия фигуры равна  $Mu_0^2/2 = TR/2$ .

Исследуем теперь процесс поворота фигуры вокруг точки Г. Изменение кинетической энергии определяется работой силы тяжести и сил  $T$ . Положение фигуры будем задавать при помощи угла  $\varphi$ , обозначенного на Рис. 1(в). В начальный момент вращения данный угол равен  $\varphi_0 = \pi/4$ . При повороте вокруг гвоздя центр масс фигуры поднимается и одновременно смещается вправо. Изменение высоты и горизонтальное смещение равны, соответственно,

$$\begin{aligned}\Delta h &= \sqrt{2}R(\cos \varphi - \cos \varphi_0) = R(\sqrt{2} \cos \varphi - 1), \\ \Delta s &= \sqrt{2}R(\sin \varphi_0 - \sin \varphi) = R(1 - \sqrt{2} \sin \varphi).\end{aligned}$$

Таким образом, для изменения кинетической энергии получаем

$$\frac{Mu^2(\varphi)}{2} - \frac{Mu_0^2}{2} = -(Mg + T)\Delta h + T\Delta s = -(Mg + T)R(\sqrt{2} \cos \varphi - 1) + TR(1 - \sqrt{2} \sin \varphi). \quad (1)$$

Вертикальная сила  $T$  и сила тяжести совершают отрицательную работу и тормозят вращение фигуры, в то время как горизонтальная сила  $T$ , совершая положительную работу, стремится разогнать цилиндр. Рассмотрим моменты сил  $T$  и силы тяжести относительно точки Г. Найдем значение угла  $\varphi$ , при котором момент, создаваемый горизонтальной силой  $T$  совпадает с моментом двух оставшихся сил:

$$T(\sqrt{2}R \cos \tilde{\varphi} + R) = T(\sqrt{2}R \sin \tilde{\varphi} + R) + Mg\sqrt{2}R \sin \tilde{\varphi} \Leftrightarrow T \cos \tilde{\varphi} = (T + Mg) \sin \tilde{\varphi}. \quad (2)$$

Если фигуре хватит кинетической энергии для того, чтобы достичь угла  $\tilde{\varphi}$ , то при дальнейшем движении она будет только ускоряться и наверняка перевернется через гвоздь и ударится о пол с другой стороны. Таким образом, необходимым и достаточным условием является необращение в ноль кинетической энергии при  $\varphi = \tilde{\varphi}$ .

Введем обозначение

$$x \equiv 1 + \frac{Mg}{T} = \operatorname{ctg} \tilde{\varphi}. \quad (3)$$

Из уравнения (2) получаем

$$\sin \tilde{\varphi} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \cos \tilde{\varphi} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}. \quad (4)$$

Тогда, с учетом (1), условие необращения в ноль кинетической энергии сводится к следующему неравенству

$$\frac{1}{2} > x(\sqrt{2} \cos \tilde{\varphi} - 1) - (1 - \sqrt{2} \sin \tilde{\varphi}) \Leftrightarrow \frac{3}{2} + x > \sqrt{2}(x \cos \tilde{\varphi} + \sin \tilde{\varphi}) = \sqrt{2}\sqrt{1+x^2}. \quad (5)$$

Решая неравенство (5) с учетом естественного ограничения  $x > 1$ , получаем, что

$$1 < x < \frac{3 + \sqrt{10}}{2}.$$

Следовательно, для того, чтобы фигура смогла перевалиться через гвоздь, необходимо, чтобы сила натяжения нити удовлетворяла условию

$$T > \frac{2Mg}{1 + \sqrt{10}}.$$

**Ответ:** Для того, чтобы фигура смогла перевалиться через гвоздь и удариться о пол справа от него, необходимо, чтобы сила натяжения нити удовлетворяла условию  $T > 2Mg/(1 + \sqrt{10})$ .

### Задача 2.

Введем для удобства параметр  $\alpha = T_1/T_0$  (по условию задачи  $\alpha > 1$ ). Обозначим также исходное количество вещества в каждой из верхних камер за  $\nu_0$ . Из уравнения Менделеева-Клапейрона, а также условия равенства объемов и давлений газа в камерах следует, что в каждой из нижних камер изначально содержится  $\nu_0/\alpha$  молей газа. Рассмотрим некоторый момент времени, когда открыто  $n$  нижних камер. В этом случае среди верхних камер открыто либо  $n$ , либо  $n+1$ . Определим, какую температуру будет иметь смесь газов после установления термодинамического равновесия в этих двух случаях:

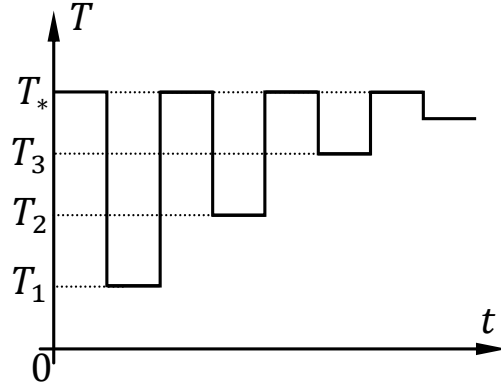


Рис. 2:

1) Открыто  $n$  нижних и  $n$  верхних камер.

Поскольку перегородки теплоизолированы, внутренняя энергия газа не изменяется при смешивании, что позволяет найти равновесную температуру  $T_*$  из уравнения

$$\frac{3}{2} n \nu_0 R T_0 + \frac{3}{2} n \frac{\nu_0}{\alpha} R \alpha T_0 = \frac{3}{2} \left( \nu_0 + \frac{\nu_0}{\alpha} \right) n R T_*. \quad (6)$$

Отсюда следует, что температура смеси не зависит от  $n$  и равна

$$T_* = \frac{2\alpha}{\alpha + 1} T_0. \quad (7)$$

2) Открыто  $n$  нижних и  $n + 1$  верхних камер.

Обозначим равновесную температуру за  $T_n$ . Имеет место следующее уравнение:

$$\frac{3}{2} (n + 1) \nu_0 R T_0 + \frac{3}{2} n \frac{\nu_0}{\alpha} R \alpha T_0 = \frac{3}{2} \left[ (n + 1) \nu_0 + n \frac{\nu_0}{\alpha} \right] R T_n. \quad (8)$$

Отсюда находим

$$T_n = \frac{(2n + 1)\alpha}{(\alpha + 1)n + \alpha} T_0. \quad (9)$$

Мы видим, что значение  $T_n$  при больших  $n$  стремится к  $T_*$ , как и следовало ожидать.

Выражения (7) и (9) задают температуру смеси газов, находящейся в термодинамическом равновесии. Представим, что равновесие наступает сразу же после открытия очередной камеры, т. е. газ перемешивается и средние кинетические энергии молекул обоих газов смеси выравниваются мгновенно. В этом случае показания датчика температуры ложились бы на график, схематично представленный на Рис. 2. Однако реальные показания датчика оказались другими. Это связано с тем, что при открывании очередной камеры газ, находящийся в ней, перемешивается с газом из уже открытых камер с конечной скоростью, т. е. равновесие достигается не сразу, а через некоторое время. При этом перегородка должна сдвигаться достаточно медленно для того, чтобы газ успевал перемешаться до открытия следующей камеры. Как видно из графика, данного в условии задачи, газ действительно достигает равновесия, что позволяет получить значения трех равновесных температур:

$$T_* = 468 \text{ К}, \quad T_n = 450 \text{ К}, \quad T_{n+1} = 455 \text{ К}, \quad (10)$$

где  $n$  пока неизвестно. Приравняем эти численные значения к соответствующим выражениям (7) и (9):

$$\frac{2\alpha}{\alpha + 1} T_0 = T_* = 468 \text{ К}, \quad (11)$$

$$\frac{(2n + 1)\alpha}{(\alpha + 1)n + \alpha} T_0 = T_n = 450 \text{ К}, \quad (12)$$

$$\frac{(2n + 3)\alpha}{(\alpha + 1)n + 2\alpha + 1} T_0 = T_{n+1} = 455 \text{ К}. \quad (13)$$

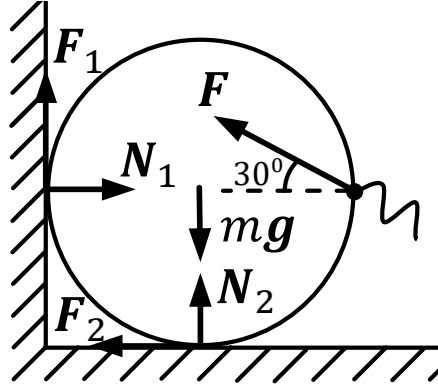


Рис. 3:

Мы получили систему из трех уравнений, позволяющую найти  $n$ ,  $\alpha$  и  $T_0$ . При решении системы удобно рассмотреть отношения  $T_*/T_n$  и  $T_*/T_{n+1}$ :

$$\frac{T_*}{T_n} = \frac{2}{2n+1} \left( n + \frac{\alpha}{\alpha+1} \right) \implies \frac{\alpha}{\alpha+1} = \frac{2n+1}{2} \frac{T_*}{T_n} - n, \quad (14)$$

$$\frac{T_*}{T_{n+1}} = \frac{2}{2n+3} \left( n+1 + \frac{\alpha}{\alpha+1} \right) = \frac{2}{2n+3} \left( n+1 + \frac{2n+1}{2} \frac{T_*}{T_n} - n \right) = \frac{1}{2n+3} \left[ 2 + (2n+1) \frac{T_*}{T_n} \right]. \quad (15)$$

Таким образом, мы получаем уравнение, содержащее только  $n$ :

$$(2n+3) \frac{T_*}{T_{n+1}} = 2 + (2n+1) \frac{T_*}{T_n}. \quad (16)$$

Отсюда

$$n = \frac{3T_*T_n - T_*T_{n+1} - 2T_nT_{n+1}}{2T_*(T_{n+1} - T_n)}. \quad (17)$$

Подставляя численные значения, получаем  $n = 2$ . Следовательно, к моменту времени  $t_0$  объединены между собой две верхние и две нижние камеры. Теперь из уравнения (14) легко найти  $\alpha$ :

$$\frac{\alpha}{\alpha+1} = \frac{5}{2} \cdot \frac{468}{450} - 2 \implies \alpha = 3/2. \quad (18)$$

Значение  $T_0$  определяется из уравнения (11):

$$T_0 = \frac{3/2+1}{2 \cdot 3/2} \cdot 468 \text{ К} = 390 \text{ К}. \quad (19)$$

Начальная температура газа в нижних камерах равна  $T_1 = (3/2) \cdot 390 \text{ К} = 585 \text{ К}$ .

Ответ:  $T_0 = 390 \text{ К}$ ,  $T_1 = 585 \text{ К}$ , к моменту времени  $t_0$  было объединено четыре камеры.

### Задача 3.

Рассмотрим сначала условия равновесия левого цилиндра. На Рис. 3 отмечены силы, действующие на цилиндр. Направления сил трения  $F_1$  и  $F_2$  выбраны формально. Условия равновесия сил в проекции на вертикальную и горизонтальную оси имеют вид:

$$F_1 - mg + \frac{1}{2} F + N_2 = 0, \quad (20)$$

$$N_1 - F_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} F = 0. \quad (21)$$

Условие равновесия моментов сил относительно оси цилиндра записывается в виде

$$\frac{1}{2}FR - F_1R - F_2R = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}F - F_1 - F_2 = 0. \quad (22)$$

Нас интересует предельный случай, когда любое сколь угодно малое увеличение  $F$  выводит цилиндр из равновесия. Предположим сначала, что цилиндр при этом начинает скользить по стене и полу, вращаясь вокруг своей неподвижной оси. Очевидно, что такое вращение должно происходить против хода часовой стрелки, т. е. величины  $F_1$  и  $F_2$  положительны и равны  $\mu N_1$  и  $\mu N_2$ , соответственно. Тогда система уравнений (20)–(22) примет вид

$$\mu N_1 - mg + \frac{1}{2}F + N_2 = 0, \quad (23)$$

$$N_1 - \mu N_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}F = 0, \quad (24)$$

$$\frac{1}{2}F - \mu N_1 - \mu N_2 = 0. \quad (25)$$

Решая систему этих трех уравнений относительно  $F$ ,  $N_1$  и  $N_2$ , получаем

$$F = \frac{2\mu(\mu + 1)mg}{(2 + \sqrt{3})\mu^2 - (\sqrt{3} - 1)\mu + 1}, \quad (26)$$

$$N_1 = \frac{(\sqrt{3} + 1)\mu mg}{(2 + \sqrt{3})\mu^2 - (\sqrt{3} - 1)\mu + 1}, \quad (27)$$

$$N_2 = \frac{(1 - \mu\sqrt{3})mg}{(2 + \sqrt{3})\mu^2 - (\sqrt{3} - 1)\mu + 1}. \quad (28)$$

В первую очередь заметим, что дискриминант, соответствующий многочлену в знаменателе, меньше нуля, а коэффициент при старшей степени  $\mu$  положительный. Следовательно, знаменатель заведомо больше нуля. Выражение (26) задает значение силы  $F$ , при котором цилиндр перестает быть в равновесии. В случае  $\mu = 0$  имеем  $F = 0$ ,  $N_1 = 0$  и  $N_2 = mg$ . Это означает, что при отсутствии трения любая ненулевая сила со стороны пружины заставляет цилиндр вращаться против хода часовой стрелки. Из выражений (26) и (27) видно, что  $F$  и  $N_1$  положительны при любом  $\mu > 0$ . Но при этом проекция  $N_2$ , заданная формулой (28), обращается в нуль при  $\mu = 1/\sqrt{3}$  и становится отрицательной при больших значениях  $\mu$ . Таким образом, при  $\mu > 1/\sqrt{3}$  цилиндр отрывается от горизонтальной поверхности, и выражения (26)–(28) перестают быть верными. Отсюда, в свою очередь, следует, что при  $\mu > 1/\sqrt{3}$  оказывается неверным исходное предположение  $F_1 = \mu N_1$ . Таким образом, скольжение цилиндра по стенке отсутствует. В этом случае при рассмотрении уравнений (20)–(22) нужно учесть  $N_2 = F_2 = 0$ . Тогда система уравнений запишется в следующем виде:

$$F_1 - mg + \frac{1}{2}F = 0, \quad (29)$$

$$N_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}F = 0, \quad (30)$$

$$\frac{1}{2}F - F_1 = 0. \quad (31)$$

Отсюда получаем

$$F = mg, \quad (32)$$

$$N_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}mg, \quad (33)$$

$$F_1 = \frac{1}{2}mg. \quad (34)$$

Легко явно проверить, что при  $\mu > 1/\sqrt{3}$  выполняется условие  $F_1 < \mu N_1$ . Таким образом, при  $\mu > 1/\sqrt{3}$  цилиндр начнет качение по стене без проскальзывания. Необходимая для этого сила со стороны пружины равна силе тяжести цилиндра  $mg$ . Подведем промежуточные итоги:

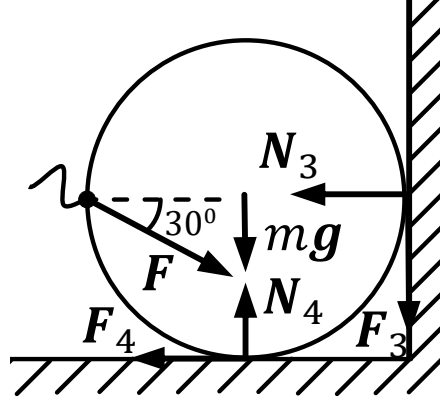


Рис. 4:

- Если  $\mu < 1/\sqrt{3}$ , то левый цилиндр начнет вращаться на месте при  $F = F_L(\mu)$ , где

$$F_L(\mu) = \frac{2\mu(\mu+1)mg}{(2+\sqrt{3})\mu^2 - (\sqrt{3}-1)\mu + 1}. \quad (35)$$

- Если  $\mu > 1/\sqrt{3}$ , то левый цилиндр начнет качение вверх по стене без проскальзывания при  $F = mg$ .

Заметим также, что  $F_L(1/\sqrt{3}) = mg$ , т. е. предельное значение  $F$  непрерывно зависит от коэффициента трения.

Рассмотрим теперь равновесие правого цилиндра. На Рис. 4 указаны силы, действующие на цилиндр. Поскольку очевидно, что цилиндр может либо покоиться, либо вращаться против хода часовой стрелки, направления сил трения  $F_3$  и  $F_4$  можно сразу зафиксировать, как это сделано на Рис. 4 и считать, что в предельном случае  $F_3 = \mu N_3$  и  $F_4 = \mu N_4$ . Запишем условия равновесия цилиндра:

$$-\frac{1}{2}F - mg + N_4 - \mu N_3 = 0, \quad (36)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}F - \mu N_4 - N_3 = 0, \quad (37)$$

$$\frac{1}{2}F - \mu N_3 - \mu N_4 = 0. \quad (38)$$

Решая систему этих уравнений относительно  $F$ ,  $N_3$  и  $N_4$ , приходим к

$$F = \frac{2\mu(1-\mu)mg}{(2-\sqrt{3})\mu^2 - (\sqrt{3}+1)\mu + 1}, \quad (39)$$

$$N_3 = \frac{\mu(\sqrt{3}-1)mg}{(2-\sqrt{3})\mu^2 - (\sqrt{3}+1)\mu + 1}, \quad (40)$$

$$N_4 = \frac{(1-\mu\sqrt{3})mg}{(2-\sqrt{3})\mu^2 - (\sqrt{3}+1)\mu + 1}. \quad (41)$$

Исследуем выражение в знаменателе. В отличие от предыдущего случая теперь знаменатель может обращаться в нуль. Решая квадратное уравнение, можно получить следующее выражение для корней соответствующего многочлена:

$$\mu_{\pm} = \frac{1}{2} (2 + \sqrt{3}) \left[ 1 + \sqrt{3} \pm \sqrt{2(3\sqrt{3}-2)} \right]. \quad (42)$$

При этом оба корня являются положительными:  $\mu_- \approx 0.38$ ,  $\mu_+ \approx 9.8$ . Теперь рассмотрим выражения (39)–(41) как функции  $\mu$ . При  $\mu = 0$  имеем  $F = N_3 = 0$  и  $N_4 = mg$ . Затем с увеличением коэффициента

трения величина  $F$  растет и при приближении  $\mu$  к  $\mu_-$  стремится к  $+\infty$ . В этот момент силы реакции  $N_3$  и  $N_4$ , а также силы трения  $F_3$  и  $F_4$  тоже становятся бесконечными. Таким образом, когда коэффициент трения достигает значения  $\mu_- \approx 0.38$ , цилиндр заклинивает и при любой сколь угодно большой силе  $F$  его равновесие сохраняется. Другими словами, для любого сколь угодно большого значения  $F$  найдется значение  $\mu(F) < \mu_-$ , достаточно близкое к  $\mu_-$ , при котором цилиндр будет находиться в равновесии. Очевидно, что и при бóльших коэффициентах трения [ $\mu > \mu(F)$ ] равновесие сохранится. Таким образом, при любых коэффициентах трения  $\mu > \mu_-$  цилиндр будет находиться в равновесии вне зависимости от значения силы  $F$ . Подведем итоги:

- Если  $\mu < \mu_-$ , то правый цилиндр начнет вращаться на месте при  $F = F_R(\mu)$ , где

$$F_R(\mu) = \frac{2\mu(1-\mu)mg}{(2-\sqrt{3})\mu^2 - (\sqrt{3}+1)\mu + 1}. \quad (43)$$

- Если  $\mu > \mu_-$ , то правый цилиндр будет находиться в равновесии при любой  $F$ .

Перейдем к ответу на вопрос задачи. В зависимости от значения  $\mu$  возможны несколько сценариев. Рассмотрим их последовательно, разбив луч  $\mu > 0$  на три промежутка:

- Если  $\mu > 1/\sqrt{3}$ , то при  $F = mg$  возникает качение левого цилиндра по вертикальной стенке без проскальзывания.
- Если  $\mu_- < \mu < 1/\sqrt{3}$ , то при  $F = F_L(\mu)$  левый цилиндр начинает вращаться вокруг своей оси.
- Если  $0 < \mu < \mu_-$ , то требуется сравнить значения функций  $F_L(\mu)$  и  $F_R(\mu)$ , используя явные выражения (35) и (43). Обозначим за  $D_L(\mu)$  и  $D_R(\mu)$  знаменатели соответствующих дробей. Нетрудно показать, что

$$F_L(\mu) - F_R(\mu) = \frac{8\mu^3(\mu - \sqrt{3})mg}{D_L(\mu) D_R(\mu)}. \quad (44)$$

Данное выражение при  $0 < \mu < \mu_-$  является строго отрицательным. Следовательно,  $F_L(\mu) < F_R(\mu)$ . Таким образом, случаю минимальной силы  $F$  отвечает  $F = F_L(\mu)$ , при которой левый цилиндр начинает вращаться на месте.

Ответ: Если  $0 < \mu < 1/\sqrt{3}$ , то  $F_{\min} = F_L(\mu)$  [см. (35)]. При этом левый цилиндр начинает вращение на месте против хода часовой стрелки. Если  $\mu > 1/\sqrt{3}$ , то при  $F_{\min} = mg$  левый цилиндр начинает качение по стенке без проскальзывания.

#### Задача 4.

Рассмотрим последовательное и параллельное соединение двух элементов с нелинейной вольт-амперной характеристикой (ВАХ) вида  $U = \alpha I^2$ . Для общности будем считать, что коэффициенты пропорциональности у элементов разные,  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , см. Рис. 5. При последовательном соединении через оба элемента течет одинаковый ток  $I$ . Следовательно, полное падение напряжение на двух элементах равно

$$U = U_1 + U_2 = \alpha_1 I^2 + \alpha_2 I^2 = (\alpha_1 + \alpha_2) I^2 \equiv \tilde{\alpha} I^2. \quad (45)$$

Таким образом, последовательное соединение двух элементов эквивалентно подключению одного элемента с ВАХ того же вида, но с коэффициентом  $\tilde{\alpha} = \alpha_1 + \alpha_2$ . При параллельном соединении напряжения на обоих элементах совпадают,  $U = U_1 = U_2$ , а полный ток делится между элементами,  $I = I_1 + I_2$ . Следовательно, параллельное соединение можно заменить на элемент с ВАХ  $U = \tilde{\alpha} I^2$  при условии, что

$$\sqrt{\frac{U}{\tilde{\alpha}}} = \sqrt{\frac{U}{\alpha_1}} + \sqrt{\frac{U}{\alpha_2}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\tilde{\alpha}}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}}. \quad (46)$$

Формулы (45) и (46) легко обобщить на случай большего числа элементов. Соединяя нагреватели, мы всегда будем получать вольт-амперную характеристику параболического вида, но коэффициенты при квадратичном члене будут меняться. Имея в распоряжении четыре элемента, не представляется возможным собрать схему типа “мостик”, поэтому, используя полученные выражения, можно рассчитать любую электрическую схему, которая допустима согласно условию задачи.

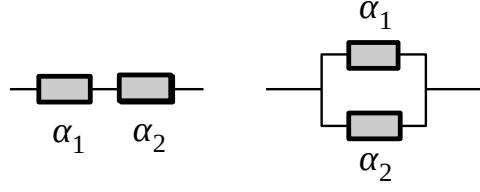


Рис. 5:

Таблица 1: Коэффициенты  $\beta$  при квадратичном члене в вольт-амперной характеристике

Схема	$\beta/\alpha$	$\beta$ (В/А <sup>2</sup> )	Схема	$\beta/\alpha$	$\beta$ (В/А <sup>2</sup> )
1	1	1.00	9	$\frac{9}{4}$	2.25
2	2	2.00	10	$\frac{5 + 2\sqrt{2}}{3 + 2\sqrt{2}}$	$\approx 1.34$
3	$\frac{1}{4}$	0.25	11	$\frac{10}{9}$	$\approx 1.11$
4	3	3.00	12	$\frac{3}{4 + 2\sqrt{3}}$	$\approx 0.40$
5	$\frac{5}{4}$	1.25	13	$\frac{5}{9 + 4\sqrt{5}}$	$\approx 0.28$
6	$\frac{2}{3 + 2\sqrt{2}}$	$\approx 0.34$	14	$\frac{2}{9 + 4\sqrt{2}}$	$\approx 0.14$
7	$\frac{1}{9}$	$\approx 0.11$	15	$\frac{1}{16}$	$\approx 0.06$
8	4	4.00	16	$\frac{1}{2}$	0.50

Обозначим коэффициент в ВАХ при  $I^2$  для некоторой схемы, собранной из нагревателей, через  $\beta$ . Тогда закон Ома для полной цепи с источником тока имеет вид,

$$U_0 = IR + U, \quad U = \beta I^2. \quad (47)$$

Здесь  $IR$  — напряжение, падающее на внутреннем сопротивлении источника, а  $U$  — напряжение, приходящееся на собранную из нагревателей электрическую цепь. Решая это уравнение, находим ток

$$I = \frac{-R + \sqrt{R^2 + 4\beta U_0}}{2\beta}. \quad (48)$$

Полная мощность тепловыделения на нагревателях равна

$$P = UI = (U_0 - IR)I. \quad (49)$$

Как функция тока  $I$ , мощность есть парабола с ветвями, направленными вниз. Максимум мощности соответствует току  $I_{\max} = U_0/2R = 6.25$  А. Определим, при каком значении коэффициента  $\beta$  реализуется данный максимум

$$\frac{U_0}{2R} = \frac{-R + \sqrt{R^2 + 4\beta_{\max}U_0}}{2\beta_{\max}} \Leftrightarrow \beta_{\max} = \frac{2R^2}{U_0} = 0.32 \text{ В/А}^2. \quad (50)$$



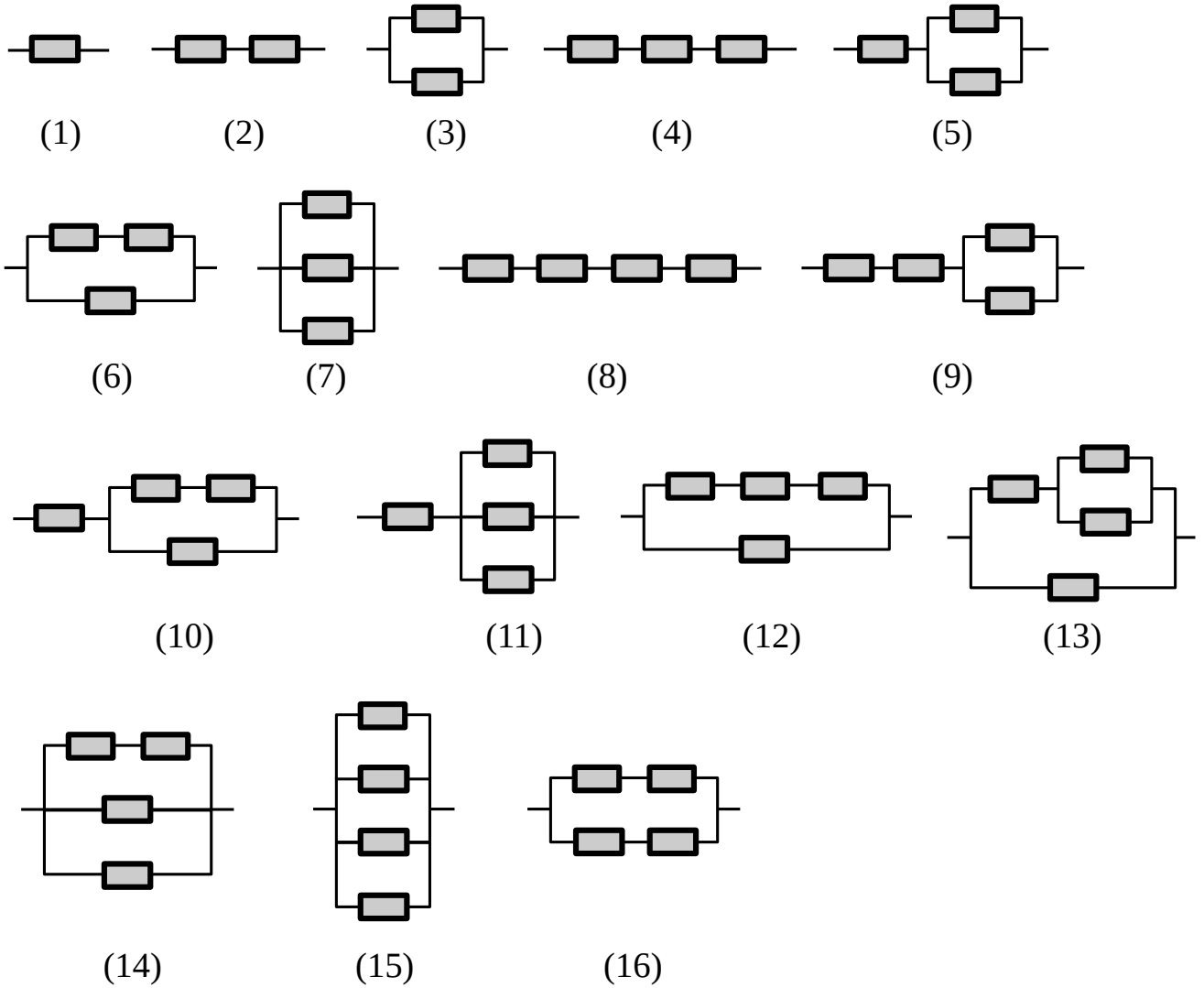


Рис. 6:

Сравнивая коэффициент  $\beta$  для различных схем, можно судить о том, насколько мощность тепловыделения близка к максимуму.

Все возможные неэквивалентные электрические схемы, которые можно собрать, имея 4 электронагревателя, показаны на Рис. 6. Используя формулы (45) и (46), определим, чему равны коэффициенты при  $I^2$  для соответствующих ВАХ. Результаты расчетов приведены в Таблице 1. Из этой таблицы видно, что наиболее близкие к значению (50) коэффициенты  $\beta$  у схем под номерами 6 и 13,

$$\beta_6 \approx 0.34 \text{ В/А}^2, \quad |\beta_6 - \beta_{\max}| \approx 0.02 \text{ В/А}^2, \quad (51)$$

$$\beta_{13} \approx 0.28 \text{ В/А}^2, \quad |\beta_{13} - \beta_{\max}| \approx 0.04 \text{ В/А}^2, \quad (52)$$

Сравним соответствующие токи,

$$I_6 \approx 6.11 \text{ А}, \quad |I_6 - I_{\max}| \approx 0.14 \text{ А}, \quad (53)$$

$$I_{13} \approx 6.54 \text{ А}, \quad |I_{13} - I_{\max}| \approx 0.29 \text{ А}, \quad (54)$$

Ток в схеме 6 ближе к максимальному значению. Таким образом, максимально возможную мощность тепловыделения можно получить, собрав из трех нагревателей схему под номером 6. Данной схеме соответствует мощность тепловыделения  $P_6 \approx 78.08 \text{ Вт}$ .

Ответ: Максимальную мощность тепловыделения можно получить собрав из трех нагревателей схему под номером 6 на Рис. 6. Соответствующая мощность тепловыделения равна  $P \approx 78.08$  Вт.

**Задача 5.**

См. решение задачи № 3 в варианте 11 класса.

**Городская открытая олимпиада школьников по физике 2017/18 г.**  
**Теоретический тур**  
**10 класса**

Указано максимальное число баллов за пункт решения. Проверяющие могут оценить пункт меньшим числом баллов, если он выполнен с ошибкой или не полностью. В случае, если в работе присутствует альтернативное решение, оно должно быть оценено исходя из полного числа баллов при условии, что является верным. Должны быть оценены все правильные идеи, высказанные участником.

**Задача 1 (всего 10 баллов)**

A	Определена скорость $v_0$ , с которой фигура налетает на гвоздь.	<b>1 балл</b>
B	Учтено, что при ударе полностью гасится составляющая скорости вдоль прямой, соединяющей центр масс фигуры и гвоздь. Начальная скорость поворота фигуры равна $v_0/\sqrt{2}$ .	<b>2 балла</b>
C	Закон сохранения энергии (с учетом работы сил $T$ ) для поворота на произвольный угол.	<b>3 балла</b>
D	Указано, то существует критический угол, вплоть до которого внешние силы тормозят вращение фигуры, а при больших значениях угла — разгоняют. Правило моментов.	<b>2 балла</b>
E	Определены возможные значения силы $T$ , при которых фигура перевалится через гвоздь.	<b>2 балла</b>

**Задача 2 (всего 10 баллов)**

A	Найдена равновесная температура газа при одинаковом числе открытых верхних и нижних камер.	<b>2 балла</b>
B	Найдена равновесная температура в случае, если среди верхних камер открыто на одну больше, чем среди нижних.	<b>2 балла</b>
C	По графику определены значения трех равновесных температур.	<b>1 балл</b>
D	Определено количество открытых камер.	<b>2 балла</b>
E	Определена одна из искомым температур.	<b>2 балла</b>
F	Определена вторая температура.	<b>1 балл</b>

**Задача 3 (всего 12 баллов)**

A	Выписаны условия равновесия левого цилиндра (условия на силы и моменты сил).	<b>3 балла</b>
B	Найдено предельное значение силы $F$ в случае вращения левого цилиндра на месте.	<b>1,5 балла</b>
C	Рассмотрен случай отрыва левого цилиндра от горизонтальной поверхности и найдено соответствующее предельное значение $F$ .	<b>1 балл</b>
D	Выписаны условия равновесия правого цилиндра.	<b>3 балла</b>
E	Найдено предельное значение силы $F$ для правого цилиндра.	<b>1,5 балла</b>
F	Проведен анализ знаменателя в найденном выражении для силы $F$ .	<b>1 балл</b>
G	Записан полный ответ на вопрос задачи.	<b>1 балл</b>

**Задача 4 (всего 10 баллов)**

A	Закон Ома для полной цепи (учтено внутреннее сопротивление источника и сопротивление нагрузки).	<b>1 балл</b>
B	Формула для мощности, выделяемой на нагрузке: $P=UI$ , где $U$ — напряжение на нагрузке, а $I$ — ток в цепи.	<b>1 балл</b>
C	Нарисована «правильная» схема, при которой реализуется максимум тепловыделения.	<b>1 балл</b>
D	Исследованы электрические схемы, где использованы все 4 нагревателя	<b>3 балла</b>
E	Исследованы электрические схемы, где использованы только 1, 2 или 3 нагревателя	<b>3 балла</b>
F	Рассчитана мощность максимального тепловыделения	<b>1 балл</b>

*Примечание:*

1) Если в пункте D рассмотрены 1-2 схемы, то ставится 1 балл; если рассмотрены 3-5 схем, то ставится 2 балла; если рассмотрены 6-9 схем, то ставится 3 балла.

2) Если участник рассматривает только электрические схемы, где использованы все 4 нагревателя, и указывает схему, реализующую максимум тепловыделения на данном подмножестве, то за расчет соответствующей мощности он получает 1 балл из пункта F.

**Задача 5 (всего 10 баллов)**

A	Найден угол $\beta$ , под которым лучи входят в куб.	<b>1 балл</b>
B	Найден угол $\gamma$ , под которым лучи выходят из соседней боковой грани куба.	<b>2 балла</b>
C	Указано, что в опыте Лизы из куба выходят три пучка параллельных лучей, дающих три изображения на экране в фокальной плоскости.	<b>1 балл</b>
D	Записано соотношение, связывающее угол $\gamma$ и расстояние между изображениями на экране.	<b>2 балла</b>
E	Указано, что при некоторых значениях коэффициента преломления куба может возникать полное внутреннее отражение.	<b>1 балл</b>
F	Найден коэффициент преломления куба Лизы.	<b>1 балл</b>
G	Найдено минимальное значение коэффициента преломления куба Барта.	<b>2 балла</b>