Задача 1. Лучше собаки

Длина поводка равна расстоянию между Малышом и собакой, значит наибольшая длина достигается, когда мальчик и собака находятся в противоположных углах площадки. В этот момент разность между путями, которые они прошли должна быть равна двум сторонам квадрата, то есть 20 м плюс еще какое-то количество периметров квадрата (40 м). Чтобы понять когда такое происходит запишем относительную скорость:

$$v_{\text{отн}} = |v_{\text{м}} - v_{\text{с}}| = 3 \text{ м/с}$$

Значит потенциально могут подойти моменты времени:

$$t_1 = \frac{20}{3} \text{ с}; \quad t_2 = \frac{60}{3} \text{ с}; \quad t_3 = \frac{100}{3} \text{ с} \quad \text{и так далее}$$

Поймем в каких точках будут находится мальчик и собака. Нужно, чтобы Малыш находился в одному углу, а собака в противоположном. В момент t_1 Малыш пройдет расстояние

$$S_{1_{\text{м}}} = \frac{40}{3} \text{ м}$$

эта положение не подходит. Проверим следующее:

$$S_{2_{\text{м}}} = 40 \text{ м}$$

То есть мальчик прошел полный круг по площадке. Проверим, что собака в противоположном углу:

$$S_{2_{\text{с}}} = 100 \text{ м}$$

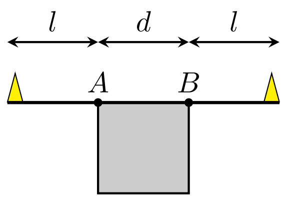
значит она пробежала два с половиной круга. Таким образом, искомое время равно:

$$t = 20 \text{ с}$$

Задача 2. Мыши и сыр

Вредная мышь хочет уронить линейку. Для того, чтобы это сделать, ей следует добиться максимального «опрокидывающего» момента. Заметим, что наибольший момент соответствует минимальному расстоянию между мышами. А оно достигается в случае, когда мыши бегут в одну сторону. Значит Вредной надо всегда бежать за Голодной.

Пусть отношение скоростей Вредной и Голодной равно $k < 1$, расстояние от края бруска до сыра равно l, а ширина бруска — d. Если Голодная мышь побежит влево, линейка может начать вращаться относительно точки A. Условие того, что через время t линейка не опрокинется можно записать как:



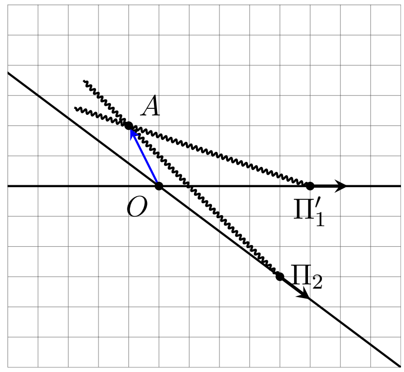
$$M_{\text{с}}gl + m_{\Gamma}g \cdot vt + m_{\text{B}}g \cdot kvt \leq (l+d)M_{\text{с}}$$

Теперь запишем аналогичное условие в случае, когда Голодная мышь побежала вправо. Тогда линейка будет вращаться относительно точки B:

$$M_{\text{с}}gl + m_{\Gamma}g \cdot (vt - d) + m_{\text{B}}g \cdot (kvt - d) \leq (l+d)M_{\text{с}}$$

Видно, что второе условие «слабее» первого, то есть выполняется для большего диапазона k, поэтому Голодной всегда следует бежать вправо.

Задача 3. Пароходы



Заметим, что из теоремы Пифагора $O\Pi_2 = \sqrt{4^2+3^2} = 5$. Мысленно «подвинем» первый пароход на одну клетку вправо (параллельно перенеся след его дыма). Тогда расстояние от точки пересечения траекторий до пароходов будет одинаковым, значит, так как их скорости равны, они находились в точке O одновременно. Будем считать, что времени $t=0$ пароходы оказались в точке O и за время τ доплыли до точек Π_1', Π_2, изображенных на новом рисунке.

Дым движется со скоростью ветра, значит тот участок дыма, который пароходы выпустили, проходя точку O, должен лежать на пересечении следов.

Осталось найти скорость ветра. Пусть длина одной клетки равна l. За время t_1 пароходы прошли расстояние

$$5l = v\cdot\tau \quad \Rightarrow \tau = \frac{5l}{v}$$

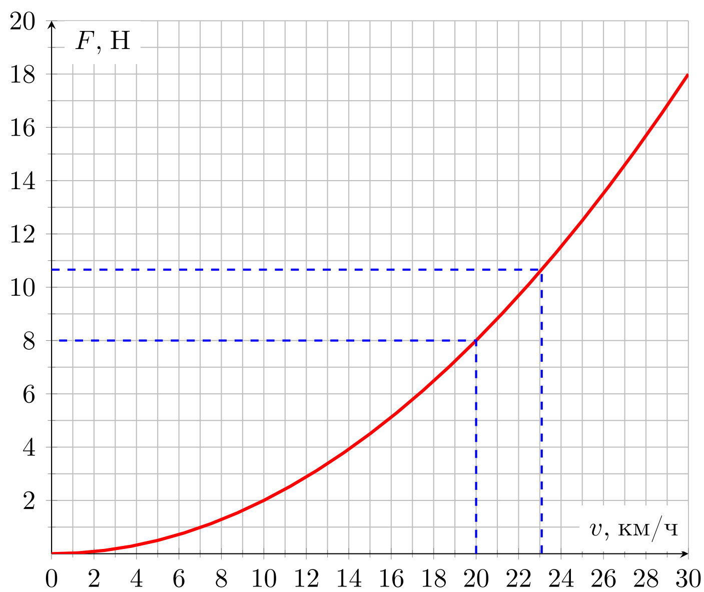
в то время как дым прошел (из теоремы Пифагора)

$$S = |OA| = \sqrt{l^2+(2l)^2} = \sqrt{5}l$$

Тогда скорость ветра

$$v_{\text{в}} = \frac{S}{\tau} = \frac{\sqrt{5}l}{5l/v} = \frac{1}{\sqrt{5}}v \approx 22{,}4\ \text{км/ч}$$

Задача 4. Почтальон Печкин



Скорость почтальона ограничена лишь мощностью, которую он способен развивать. В установившемся режиме (т.е. когда скорость постоянна) эта мощность идет на преодоление сил сопротивления. Поскольку сопротивлением колес об асфальт можно пренебречь, единственная сила сопротивления здесь — сила сопротивления воздуха.

Запишем все сказанное для первого заезда. В этом случае скорость почтальона относительно воздуха равна $v_1 = 20$ км/ч. Значит, на него будет действовать сила сопротивления $F_1 = F(20\text{км/ч})$. Баланс мощностей пишется так:

$$P = F_1\cdot v_1 = F(20\ \text{км/ч})\cdot v_1. \qquad (1)$$

Находим по графику (см. рис.) значение силы при скорости 20 км/ч — оно составляет 8 Н. Тогда получаем, что $P = 8\ \text{Н}\cdot 20\text{км/ч} = 160$ Вт. Это и есть мощность, развиваемая мопедом.

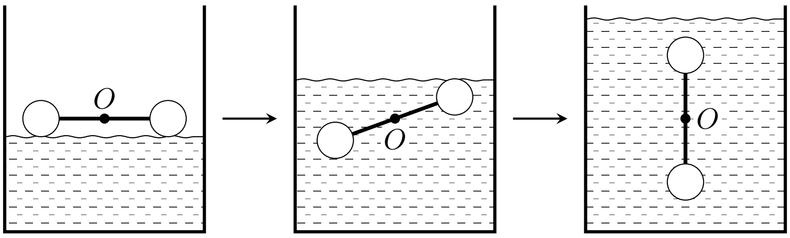
Теперь запишем все то же самое для второго заезда. Ясно, что ветер дует почтальону в лицо, именно поэтому его скорость $v_2 < v_1$. Пусть искомая скорость ветра u, тогда сила сопротивления $F_2 = F(v_2+u)$. Мощность, развиваемая двигателем, осталась той же самой, поэтому

$$P = F_2\cdot v_2 = F(v_2+u)\cdot v_2, \qquad (2)$$

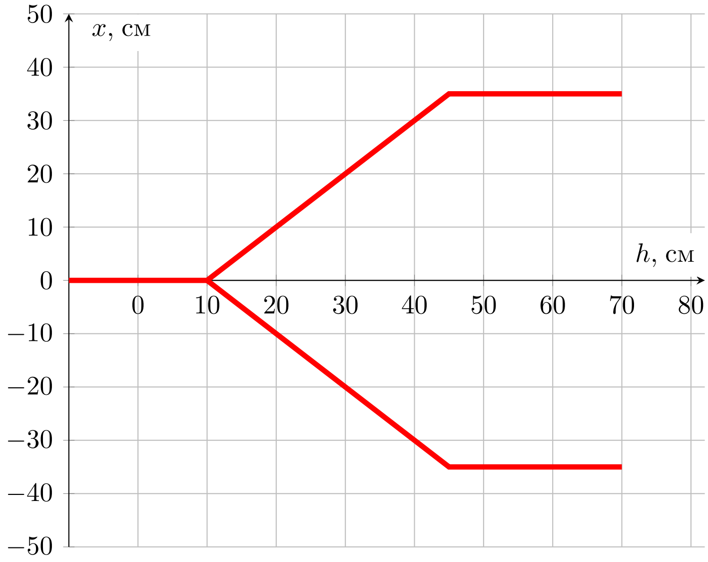
откуда получаем, что $F(v_2+u) = 160\ \text{Вт}/15\ \text{км/ч} \approx 10{,}7$ Н. Отсюда по графику (см. рис. **??**) находим, что $v_2+u \approx 23$ км/ч, значит $u \approx 8$ км/ч.

Задача 5. Шары в воде x2

Из соображений симметрии в начальный момент времени на шарики действуют одинаковые силы. Это означает, что система находится в равновесии. Можно было бы подумать, что из этого следует, что шарики всегда будут находиться на одной высоте, однако это не так. Система, приведенная в состояние равновесия, не всегда в нем остается. Известные примеры такого поведения — перевернутый маятник (изначально неподвижный в верхней точке траектории), два шарика стоящих друг на друге. Если при небольшом смещении от равновесия возникают силы, которые будут увеличивать это смещение, положение будет неустойчивым и при возникновении малого возмущения система покинет положение равновесия. В этой задаче вода наливается медленно, значит система «успеет» перейти в состояние устойчивого равновесия. Стоит заметить, что в общем случае это происходит не всегда.
Рассмотрим случай, когда шары полностью погружены в воду. Предположим, что стержень, на котором закреплены шары, испытал небольшое отклонение — правый шар сместился вверх, а левый вниз. Из-за понижения внешнего давления правый шар увеличится в объеме, а левый — уменьшится. Следовательно, сила Архимеда, действующая на правый шар, увеличится, а на левый — уменьшится. Это приведет к увеличению смещения стержня, то есть правый шар и далее будет двигаться наверх, а левый — вниз.
Это движение может остановиться, когда правый шар достигнет поверхности воды — дальнейшее смещение будет приводить к уменьшению силы Архимеда, действующей на правый шар, значит получившиеся равновесие будет устойчивым (более точно — верхний шар будет чуть-чуть выступать над поверхностью воды). Если поверхность воды достаточно высоко относительно середины стержня, то конечным положением стержня будет вертикальное.

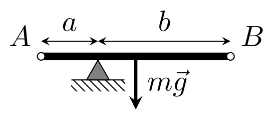


Таким образом, при повышении уровня воды можно рассмотреть три этапа: на первом стержень остается горизонтальным, пока вода не покроет верхушку шаров. В устойчивости этого равновесия предлагаем читателю убедиться самостоятельно. Далее верхняя точка одного (случайного) из шаров будет «привязана» к поверхности воды. После того как стержень займет вертикальное положение, позиции шаров меняться не будут. Уровни воды, относительно шарнира, при переходе от первого к второму, и от второго к третьему случаю составляют 10 см и 45 см, соответственно. Нарисуем график зависимости высоты центров шаров x от уровня воды h. Все высоты будем отсчитывать от уровня шарнира.



Задача 6. Петя и Вася

Не умаляя общности, будем считать, что $F_1 > F_2$, а левое плечо меньше правого. Распишем все возможные варианты приложения сил. Будем обозначать направления сил как: $(F_1 \uparrow, F_2 \downarrow)$. Эта запись будет означать, что к левому краю приложена сила F_1, направленная вверх, а к правому краю — F_2, направленная вниз.



Для того, чтобы бревно покоилось должно выполняться правило рычага. Сразу заметим, что варианты $(F_1 \uparrow, F_2 \downarrow)$ и $(F_2 \uparrow, F_1 \downarrow)$ нам не подходят, так как все силы будут «закручивать» бревно в одну сторону. Еще не подходит вариант $(F_2 \downarrow, F_1 \downarrow)$ в силу предположения о том, что $F_1 > F_2$ и $b > a$. Для оставшихся пяти вариантов честно выпишем правило рычага:

$$
\begin{aligned}
&1)\ (F_1 \downarrow, F_2 \uparrow) \qquad aF_1 + bF_2 = \frac{b-a}{2}mg \\
&2)\ (F_1 \uparrow, F_2 \uparrow) \qquad bF_2 - aF_1 = \frac{b-a}{2}mg \\
&3)\ (F_1 \downarrow, F_2 \downarrow) \qquad aF_1 - bF_2 = \frac{b-a}{2}mg \\
&4)\ (F_2 \uparrow, F_1 \uparrow) \qquad bF_1 - aF_2 = \frac{b-a}{2}mg \\
&5)\ (F_2 \downarrow, F_1 \uparrow) \qquad bF_1 + aF_2 = \frac{b-a}{2}mg
\end{aligned}
$$

Теперь надо собрать из этих измерений все возможные пары и выбрать ту, что подходит под условие. Заметим, что из первых трех уравнений может выполняться лишь одно (так как $F_{1,2} \neq 0$). Это верно и для последней пары. Наконец, $(F_1 \downarrow, F_2 \downarrow)$ не может выполняться одновременно с 4 или 5 потому, что сила большая сила F_1 уравновешивает силу тяжести и F_2 с большим плечом. В положениях 4 и 5 плечо силы тяжести не изменилось, а у F_2 — уменьшилось, значит равновесия быть не может. Таким образом осталось перебрать всего четыре варианта пар измерений. Для каждой пары будем записывать сумму и разность уравнений. Еще надо подчеркнуть, что $a \neq b$ потому, что иначе масса не участвует в уравнениях, значит мальчикам не удалось бы ее найти.

- 1, 4

$$
\begin{cases} 1+4: \quad (b-a)mg = F_1(a+b) + F_2(b-a) \\ 1-4: \quad (b-a)F_1 = F_2(a+b) \end{cases} \Rightarrow m = \frac{F_1^2 + F_2^2}{F_2 g}
$$

- 1, 5

$$
\begin{cases} 1+5: \quad (b-a)mg = F_1(a+b) + F_2(b+a) \\ 1-5: \quad (a-b)F_1 = F_2(a-b) \Rightarrow F_1 = F_2 ?! \end{cases}
$$

- 2, 4

$$
\begin{cases} 2+4: \quad (b-a)mg = -F_1(a-b) + F_2(b-a) \\ 2-4: \quad (a+b)F_1 = F_2(a+b) \Rightarrow F_1 = F_2 ?! \end{cases}
$$

- 2, 5

$$
\begin{cases} 2+5: \quad (b-a)mg = F_1(b-a) + F_2(a+b) \\ 2-5: \quad (b+a)F_1 = F_2(b-a) \end{cases} \Rightarrow m = \frac{F_1^2 + F_2^2}{F_1 g}
$$

Получилось два ответа, однако один их них не подходит, это связано с тем, что правила рычага недостаточно для равновесия системы, нужно чтобы выполнялся еще и второй закон Ньютона. В случае, когда обе силы направленны вверх, его можно записать как:

$$
F_1 + F_2 = mg - N \Rightarrow F_1 + F_2 \leq mg
$$

Посмотрим внимательно на второй ответ (случай 2, 5):

$$
mg = F_2\left(\frac{F_2}{F_1}\right) + F_1 < F_1 + F_2
$$

раз $F_1 > F_2$, отношение $F_2/F_1 < 1$

Значит второй закон Ньютона не выполняется и бревно не находилось в равновесии в случае $(F_1\uparrow, F_2\uparrow)$
Остался лишь один возможный ответ:

$$m = \frac{F_1^2 + F_2^2}{F_2 g}$$

В случае, когда силы направленны равенство сил соблюдается:

$$mg = F_1\left(\frac{F_1}{F_2}\right) + F_2 > F_1 + F_2$$

Проверим соотношение во взвешивании 5:

$$F_2 + mg = F_1 + N \Rightarrow F_1 - F_2 \le mg$$

Подставим значение для массы:

$$F_1F_2 - F_2^2 \le F_1^2 + F_2^2$$

Это условие, очевидно, выполняется. Получилось, что масса бревна равна:

$$m = \frac{F_1^2 + F_2^2}{F_2 g}$$

Задача 7. Лед в стакане

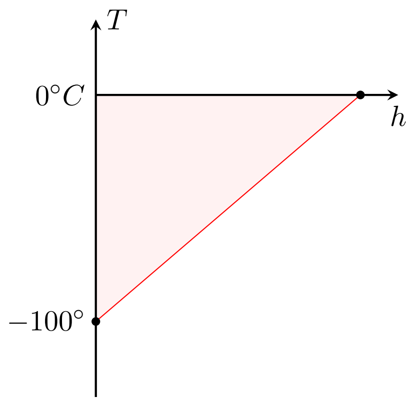
Для начала поймем, какая масса льда останется в стакане, после того, как вся вода замерзнет. Объем сохраняется, значит масса льда:

$$m_л = V\rho = 0{,}9 \text{ кг}$$

Теперь надо разобраться с температурой. В случае установившегося распределения температуры, для любого слоя льда поток тепла одинаков (иначе бы изменялась температура). Мысленно разобьем содержимое стакана на одинаковые тонкие слои толщины Δh. Поток тепла через каждый такой слой пропорционален разности температур на его границах, и, как уже было замечено, одинаков для всех слоев. Значит разность температур на границах слоев одинакова, то есть:

$$\Delta T \sim \Delta h$$

Это уравнение говорит о том, что температура от высоты зависит линейно. Исходя из условий на границе лед-воздух и лед-пол построим график зависимости температуры от высоты:
Для каждого слоя чтобы его отогреть до $0°$ потребуется энергия:



$$\delta Q = c_л \cdot \rho_л S\Delta h \cdot T(h)$$

Значит для того, чтобы получить полную энергию надо просто посчитать площадь под графиком и полная теплота выражается:

$$Q = c_л\rho_л\frac{SH(T_0 - T_к)}{2} = c_л\rho_л\frac{V(T_0 - T_к)}{2}$$

После того как весь лед отогреется до $0°C$ потребуется энергия, чтобы его расплавить:

$$Q_{пл} = \lambda\rho_л V$$

Значит всего потребуется:

$$Q_0 = \rho_л V\left(c_л\frac{T_0 - T_к}{2} + \lambda\right) \approx 400 \text{ кДж}$$

Задача 1. Лучше собаки

Если решение «умное»

- **1 балл** — Максимальное расстояние соответствует противоположным углам квадрата.
- **1 балл** — Сведение задачи к одномерной. Рассмотрение путей.
- **1 балл** — Написание кинематических законов.
- **1 балл** — Получен и обоснован ответ. $t = 20$ с

Если решение перебором

- **1 балл** — Максимальное расстояние соответствует противоположным углам квадрата. Либо рассмотрена первая угловая точка.
- **3 балла** — По одному за каждую угловую точку положения Малыша.
  Первый угол: $t = 5$ с, $S_с = 25$ м
  Второй угол: $t = 10$ с, $S_с = 50$ м
  Третий угол: $t = 15$ с, $S_с = 75$ м
  Четвертый угол: $t = 20$ с, $S_с = 100$ м

Задача 2. Мыши и сыр

- **1 балл** — Вредной надо бежать за Голодной.
- **1 балл** — Рассмотрен случай, когда обе мыши бегут влево. (Правило рычага либо обоснование того, что бежать надо в другую сторону.)
- **1 балл** — Рассмотрен случай, когда мыши бегут вправо. (Правило рычага)
- **1 балл** — Сравнение случаев и ответ. (Выгоднее бежать вправо)

Задача 3. Пароходы

- **2 балла** — Перенос пароходов на одинаковое расстояние от точки пересечения траекторий.
- **1 балл** — Точка пересечения дыма соответствует точке пересечения траекторий.
- **1 балл** — Построение вектора скорости. Ответ $v_в = v/\sqrt{5} \approx 22{,}4$ км/ч

Задача 4. Почтальон Печкин

- **1 балл** — Связь силы сопротивления с мощностью $P = F(v) \cdot v$. v — относительная скорость.
- **1 балл** — $F \cdot v_1 = F \cdot v_2$
- **1 балл** — Снятие точек с графика. $P \approx 160$ Вт; $F \approx 10{,}7$ Н
- **1 балл** — Ответ $u = 8$ км/ч.

Задача 5. Шары в воде x2

- **2 балла** — Понимание «физики» процесса. Шары сжимаются → объем меняется → меняется сила Архимеда.
- **2 балла** — Верное указание уровня после которого равновесие становится неустойчивым. (верхняя граница шаров) $h = 10$ см относительно уровня шарнира (20 см относительно начального)
- **2 балла** — Объяснение неустойчивости равновесия.
- **2 балла** — По баллу за каждую из ветвей «вилки». Заканчивается на $h = 45$ см относительно шарнира (55 см относительно начального)

Задача 6. Петя и Вася

- **1 балл** — Правильно указана точка приложения силы тяжести бревна.
- **2 балла** — Уравнения рычага для разных вариантов приложения сил. 1 балл, если рассмотрено хотя бы 4 случая, 2 балла, если рассмотрены все 8. В некоторых уравнения записывать не обязательно.
- **2 балла** — Если из уравнения моментов получилось два возможных выражения на массу, и показано, что нет других. (Если не показано — оценивается в 0).
- **2 балла** — Записано неравенство для второго закона Ньютона.
- **1 балл** — Выбран правильный ответ. $m = \frac{F_1^2+F_2^2}{F_2 g}$

Задача 7. Лед в стакане

- **1 балл** — Найдена масса оставшегося в стакане льда. 0,9 кг
- **4 балла** — Линейность градиента температур. Обоснование.
- **2 балла** — Найдена теплота, которая потребуется, чтобы разогреть лед до 0°. (94,5 кДж)
- **1 балл** — Ответ $Q \approx 400$ кДж. (Чтобы растопить лед требуется 306 кДж)