1. Брусок с грузом

Возможный вариант решения

Введем обозначения: ρ_1 и V_1 — плотность и объем бруска, $m1$ — масса бруска, ρ_2, V_2 и m_2— плотность, объем и масса груза, ρ_0 — плотность воды. Запишем условие равновесия в случае, когда брусок плавает без груза

$$m_1 g = \frac{1}{4}\rho_0 V_1 g \tag{1}$$

где в левой части равенства находятся силы, действующие вниз, а в правой наверх. В этом случае удобнее записать уравнения для оставшихся случаев в следующем виде: приравнивать не полные значения сил, действующих вверх и вниз, а приравнивать добавки к первому равенству, т.к. они так же должны быть равны. Например, во втором случае сила Архимеда увеличится на $\frac{1}{2}\rho_0 V_1 g$, а сила тяжести на $\rho_2 V_2 g$. Тогда

$$\frac{1}{2}\rho_0 V_1 g = \rho_2 V_2 g \tag{2}$$

Аналогично для третьего случая:

$$\frac{1}{4}\rho_0 V_1 g = (\rho_2 - \rho_0) V_2 g \tag{3}$$

Из первого уравнения можно найти $V_1 = 1000$ см^3. Оставшиеся два уравнения можно решать как систему уравнений с двумя неизвестными, последовательно выражая одну из них через другую. Однако удобнее воспользоваться следующими методами. Если вычесть из второго уравнения третье, то получится уравнение на V_2, откуда $V_2 = \frac{1}{4}V_1 = 250$ см^3. Чтобы найти ρ_2 разделим второе уравнение на третье

$$2 = \frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_0} \tag{4}$$

Откуда

$$\rho_2 = 2\rho_0 = 2 \text{ г/см}^3 \tag{5}$$

Тогда масса груза находится по формуле:

$$m_2 = \rho_2 \cdot V_2 = 0{,}5 \text{ кг}$$

Альтернативный вариант решения

Заметим, что во втором случае объем погруженной части увеличился втрое по сравнению с первым. Следовательно сила, действующая на брусок со стороны груза в сумме с силой тяжести самого бруска равна трем силам тяжести бруска. Тогда груз вдвое тяжелее бруска, и его масса 0,5 кг. Из третьего случая заметим, что погруженная часть бруска вдвое больше, чем в первом случае. Значит вес груза в воде равен силе тяжести бруска. Известно так же, что вес тела на воздухе и в воде отличается на вес вытесненной воды. Значит груз вытеснил 250 г воды, и его объем равен 250 см^3. Разделив массу груза на его объем, получаем плотность 2 г/см^3.

2. Сосуды

Если положить только один брусок на поршень, то он создаст избыточное давление в левом сосуде, равное $P_{\text{брусок}} = mg/S_{\text{л}}$, где $m = 600$ г – масса бруска, $S_{\text{л}} = 400$ см^2 – площадь поршня, а g – ускорение свободного падения. Это давление будет компенсироваться за счет гидростатического давления столба жидкости высотой $\Delta h_{\text{столб}}$, находящейся в правом сосуде выше уровня жидкости в левом. Давление такого столба равно $P_{\text{вода}} = \rho g \Delta h_{\text{столб}}$, где ρ – плотность воды. Приравняв давления получим

$$P_{\text{брусок}} = P_{\text{вода}} \Rightarrow mg/S_{\text{л}} = \rho g \Delta h_{\text{столб}},$$

откуда выразим высоту

$$\Delta h_{\text{столб}} = \frac{m}{\rho S_{\text{л}}} = 1{,}5 \text{ см}.$$

Если в левом сосуде уровень опустился на $\Delta h_{\text{л}}$, а в правом поднялся на $\Delta h_{\text{п}}$, то вода в правом сосуде стала выше чем в левом на $\Delta h_{\text{столб}} = \Delta h_{\text{л}} + \Delta h_{\text{п}}$. Очевидно, что при понижении уровня воды в левом сосуде, объем воды выходящий из него целиком перейдет в правый сосуд. Так как объем цилиндра равен произведению площади сечения на высоту, получаем следующие соотношения

$$\Delta h_{\text{л}} \cdot S_{\text{л}} = \Delta h_{\text{п}} \cdot S_{\text{п}} \Rightarrow \Delta h_{\text{л}} \cdot S_{\text{л}} = (\Delta h_{\text{столб}} - \Delta h_{\text{л}}) \cdot S_{\text{п}}.$$

Теперь выразим высоту на которую опустится поршень в этом случае

$$h_{\text{л}} = \Delta h_{\text{столб}} \cdot \frac{S_{\text{п}}}{S_{\text{л}} + S_{\text{л}}} = \frac{m}{\rho} \frac{S_{\text{п}}}{S_{\text{л}}} \frac{1}{S_{\text{л}} + S_{\text{л}}} = 1 \text{ см}.$$

Теперь рассмотрим, что произойдет, если затем запустить плавать брусок в правый сосуд. Когда брусок плавает, он вытесняет объем воды равный $V = m/\rho$. Можно считать, что добавление бруска в правый сосуд равносильно добавлению $V = mg/\rho$ объема воды. Так как сам по себе дополнительного давления брусок не создает, то разность уровней воды в сосудах не изменится, и уровень поднимется на одинаковое значение Δh_o в правом и левом сосуде. Его можно найти приравняв объемы

$$V = \Delta h_o \cdot S_{\text{л}} + \Delta h_o \cdot S_{\text{п}},$$

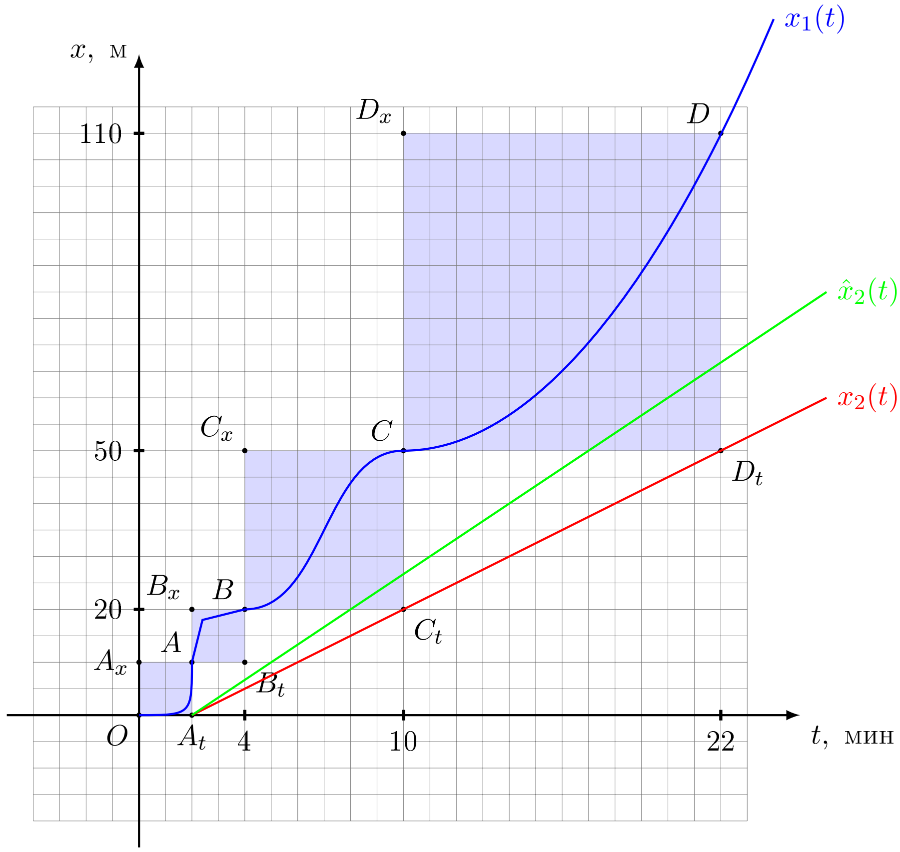
откуда

$$\Delta h_o = \frac{m}{\rho} \frac{1}{S_1 + S_2} = 0{,}5 \ \text{ см}.$$

Мы получили, что добавление бруска в левый сосуд приводит к понижению уровня на 1 см, а добавление второго бруска в правый – к повышению уровня в обоих сосудах на 0,5 см, значит в итоге уровень поршня понизится на 0,5 см.

3. Роботы

Два точечных тела сталкиваются, если в некоторый момент времени их координаты совпадают. Это означает пересечение графиков координат тел от времени, построеных в координатах x и t. Тогда, если бы мы знали закон движения первого робота (законом движения называют зависимость $x_1(t)$, где x_1 — координата первого робота), нам бы нужно было построить прямую, не пересекающую график первого робота, которую мы могли бы рассматривать как потенциальный закон движения для второго робота ($x_2(t)$ — зависимость координаты второго робота от времени, которая должна являться прямой на графике t и x, так как скорость второго робота постоянна, и проходить через точку $(2, 0)$ на графике, так как по условию второй робот стартовал из точки $x = 0$ в момент времени $t = 0$.) Однако закон движения $x_1(t)$ нам в точности неизвестен, и первый робот может иметь много различных вариантов движения. Но чтобы с уверенностью избежать столкновения, график второго робота не должен пересекаться ни с одним из возможных графиков для первого робота. Поэтому разумно начать с того, чтобы построить все возможные законы движения первого робота.



Выберем маштаб так, чтобы 10 м по оси x занимало бы столько же клеточек, сколько 2 мин по оси t. На закон движения первого робота наложено два ограничения. Во-первых, его график должен проходить через точки A, B, C, D, по условию. Во-вторых, координата x_1 с течением времени не должна уменьшаться, так как робот не может ехать в направлении, противоположном оси. Тогда видно, что линия $x_1(t)$ заключена внутри квадратов OA_xAA_t, AB_xBB_t, BC_xCC_t, CD_xDD_t, хотя и может проходить через любую точку, лежащую внутри этих квадратов, и проходить сколь угодно близко к границе. Покажем, что через A_t, C_t и D_t можно провести прямую, и эта прямая является оптимальным законом движения для второго тела. Эта линия являетсяя прямой, так как коэффициент наклона каждого из отрезков A_tC_t и C_tD_t одинаков. Действительно:

$$k_1 = \frac{20 \text{ м}}{8 \text{ с}} = 2.5 \text{ м/с}$$

$$k_2 = \frac{30 \text{ м}}{12 \text{ с}} = 2.5 \text{ м/с}$$

Можно заметить, что эта линия не может пересекаться ни с одним из возможных графиков движения первого робота до 22 минуты, так как в этом случае он бы одновременно находился, к примеру, и в точке C_t и в точке C. Заметим так же, что любая прямая, имеющая больший угловой коэффициент, чем 2.5 м/с, будет лежать выше линии, проходящей через вершины A_t, C_t и неминуемо пересекаться с одним из квадратов. Сказанное выше означает, что для второго робота невозможно движение со скоростью, большей, чем 2.5 м/с. Тогда закон движения $x_2(t)$ является оптимальным (в смысле параметра u), то есть максимально возможная скорость $u = 2.5$ м/с.

4. Пружины

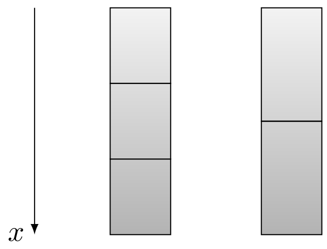
Заметим, что в каждый момент времени все пружины уравновешивают весь песок на платформе. Таким образом, насыпав малое $\triangle m$ песка и получив сдвиг на малое $\triangle h$ можно получить суммарную жесткость на текущей высоте h : $k = \frac{\triangle mg}{\triangle h}$ из закона Гука. Как известно, жесткость параллельного соединения пружин равна сумме жесткостей, таким образом, проводя касательные к каждой точке графика мы будем получать суммы жесткостей пружин, участвующих в системе на такой высоте.

Теперь посмотрим на график: он кусочно линейный, а значит, касательная к нему совпадает с его линейной частью. Тогда всего в эксперименте встречается три разные жесткости, а значит и три пружины. Первый линейный участок соответствует одной подключенной пружине, второй — двум и третий — трем. Теперь найдем жесткости: $k_1 = 1{,}5/0.06 = 25$ Н/м; $k_1 + k_2 = 2/0.02 = 100$ Н/м; $k_1 + k_2 + k_3 = 2.5/0.01 = 250$ Н/м. Тогда, подставив первое равенство во второе, а второе в третье получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 = 25 \text{ Н/м} \\ k_2 = 75 \text{ Н/м} \\ k_3 = 150 \text{ Н/м} \end{array} \right\} \tag{1}$$

5. Стержни

Возможный вариант решения



Для начала заметим, что нижняя половина правого стержня тяжелее любой трети левого стержня, а верхняя треть левого стержня легче любой половины правого стержня. Таким образом, есть только два случая, при которых сравниваемые части были равной массы: либо верхняя половина сравнивалась со средней третью, либо с нижней. Рассмотрим оба случая отдельно, но сначала введем общие обозначения. Путь L — общая длина стержня, $\rho(x)$ — линейная плотность стержня (масса единицы длины) на расстоянии x от верхнего края. Так как плотность стержня меняется равномерно, можно представить ее зависимоть от координаты, которая будет на графике (ρ, x) являться прямой линией.

Кроме того массу любого куска стержня, расположенного между точками x_1 и $x_2 \geqslant x_1$ можно вычислить, как площадь под графиком.

Случай 1

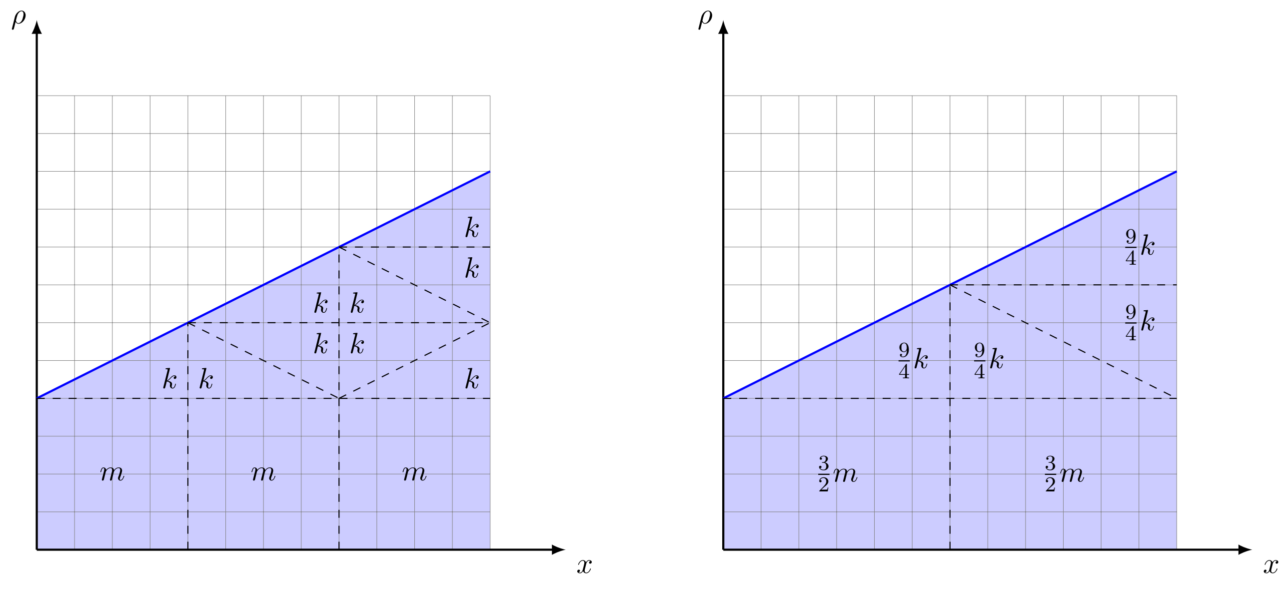
В первом случае предположим, что верхняя половина сравнивается со средней третью. Тогда масса этой трети равна 7 грамм. Ее так же можно записать через $\rho_{\text{ср}}$ — значение плотности в середине стержня.

$$M_{\frac{1}{3}} = \rho_{\text{ср}} \cdot \frac{L}{3} \tag{1}$$

Заметим, что массу всего стержня можно записать в той же форме:

$$M = \rho_{\text{ср}} \cdot L = 3M_{\frac{1}{3}} = 21 \text{ г} \tag{2}$$

Случай 2



Во втором случае предположим, что верхняя половина сравнивается с нижней третью. Обозначим на левом графике через m и k соответствующие площади, отделенные пунктиром. Через них нетрудно пересчитать площади на правом графике. Тогда масса нижней трети находится из графика и равна:

$$m + 5k \tag{3}$$

Она равна массе верхней половины:

$$\frac{3}{2}m + \frac{9}{4}k \tag{4}$$

Тогда

$$\frac{3}{2}m + \frac{9}{4} = m + 5k$$

Решая, получаем

$$k = \frac{2}{11}m \tag{5}$$

Подставим найденное значение в (3) и вспомним, что масса нижней трети равна 7 г:

$$m + \frac{10}{11}m = 7 \text{ г}$$

Откуда

$$m = \frac{11}{3} \text{ г} \tag{6}$$

Подставим это в полученное ранее выражение для общей массы:

$$M = 3m + 9k = \frac{51}{11}m = 17 \text{ г} \tag{7}$$

Альтернативный вариант решения

Для начала заметим, что нижняя половина правого стержня тяжелее любой трети левого стержня, а верхняя треть левого стержня легче любой половины правого стержня. Таким образом, есть только два случая, при которых сравниваемые части были равной массы: либо верхняя половина сравнивалась со средней третью, либо с нижней. Рассмотрим оба случая отдельно, но сначала введем общие обозначения. Путь L — общая длина стержня, $\rho(x)$ — линейная плотность стержня (масса единицы длины) на расстоянии x от верхнего края. Так как плотность стержня меняется равномерно:

$$\rho(x) = \rho_0 \cdot (1 + \alpha x) \tag{1}$$

где α — неизвестный коэффициент, ρ_0 — плотность вблизи верхнего края. Кроме того в силу равномерности изменения плотности массу любого куска стержня, расположенного между точками x_1 и $x_2 \geqslant x_1$ можно рассчитать через среднюю плотность:

$$m = \rho_{\text{ср}} \cdot (x_2 - x_1) = \frac{\rho(x_2) + \rho(x_1)}{2} \cdot (x_2 - x_1) = \rho\left(\frac{x_2 + x_1}{2}\right) \cdot (x_2 - x_1) \tag{2}$$

Случай 1

В первом случае предположим, что верхняя половина сравнивается со средней третью. Тогда масса этой трети равна 7 грамм. Запишем ее согласно формуле (2):

$$m = \rho\left(\frac{L}{2}\right) \cdot \frac{L}{3} = \rho_0 \cdot \left(1 + \alpha\frac{L}{2}\right) \cdot \frac{L}{3} \tag{3}$$

Заметим, что массу всего стержня можно записать в той же форме:

$$M = \rho\left(\frac{L}{2}\right) \cdot L = \rho_0 \cdot \left(1 + \alpha\frac{L}{2}\right) \cdot L = 3m = 21 \text{ г} \tag{4}$$

Случай 2

Во втором случае предположим, что верхняя половина сравнивается с нижней третью. Тогда ее масса:

$$m = \rho_0 \cdot \left(1 + \alpha\frac{5L}{6}\right) \cdot \frac{L}{3} \tag{5}$$

Она равна массе верхней половины:

$$m' = \rho_0 \cdot \left(1 + \alpha\frac{L}{4}\right) \cdot \frac{L}{2} \tag{6}$$

Тогда

$$\frac{1}{3} + \frac{5\alpha L}{18} = \frac{1}{2} + \frac{\alpha L}{8}$$

Решая, получаем

$$\alpha L = \frac{12}{11} \tag{7}$$

Подставим найденное значение в (6):

$$m = \frac{1}{2}\rho_0 L\left(1 + \frac{3}{11}\right)$$

Откуда

$$\rho_0 L = \frac{11}{7} m \tag{8}$$

Подставим это в полученное ранее выражение для общей массы (4):

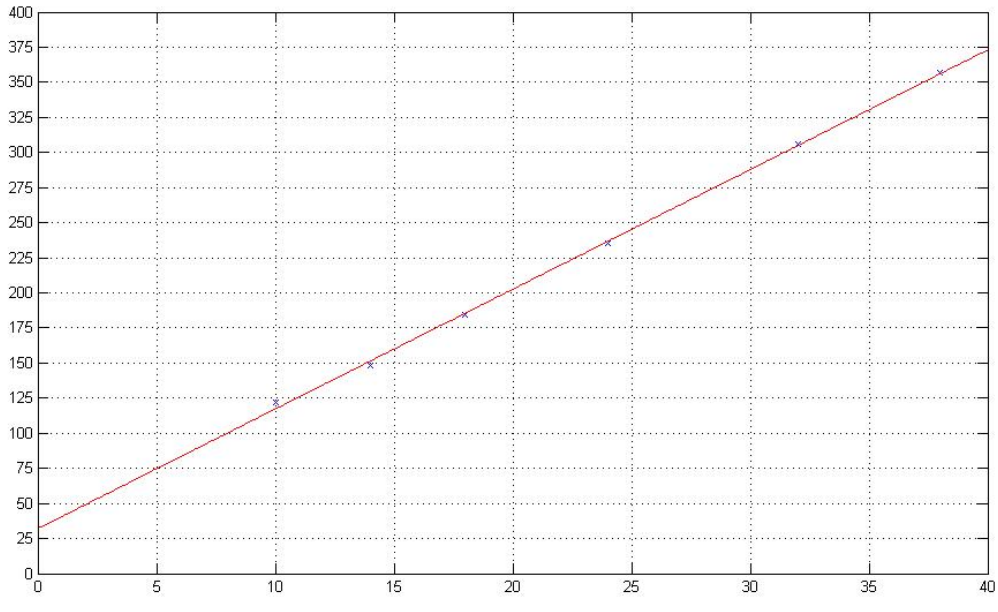
$$M = \frac{11}{7} m\left(1 + \frac{6}{11}\right) = 17 \text{ г} \tag{9}$$

6. Систематическая ошибка

Посчитаем плотность по формуле $\rho = m/V$ для каждого грузика по данным из таблицы (см. таблицу ниже). Видно, что, например,значения плотности сильно отличаются для грузика номер 1 и 6. Кроме того наблюдается систематическое снижение значения плотности, полученного по формуле с увеличением массы груза. Это указывает на то, что скорее наличие систематической ошибки в измерениях, чем случайной, привело к неправильному ответу для средней плотности.

№ грузика	Показания весов, г	Измеренный объем, мл	Значение $\rho = m/V$ г/см^3
1	122	10	12,2
2	148	14	10,6
3	184	18	10,2
4	235	24	9,8
5	306	32	9,6
6	357	38	9,4

Нанесем экспериментальные значения на координатную плоскость (M, V). Зависимость $\rho = m/V$ дает прямые, проходящие через ноль, и эксприментальные точки должны на такую прямую ложиться. Однако проведя прямую по точкам мы видим, что она имеет не нулевое пересечение с осью OY, что говорит о наличии систематической ошибки при измерении. От этой ошибки можно избавиться посредством вычитания из показаний весов «лишней добавки» так, чтобы сдвинутая прямая проходила бы через ноль. Эта «лишняя» добавка может быть найдена, как координата пересечения прямой с осью (M). Тогда с помощью новой прямой можно найти плотность, как коэффициент наклона этой прямой. Численное значение ρ составляет 8,53 г/см^3.



7. Пруд

Рассмотрим столбик частиц определенного размера L, который в начальный момент времени занимает все пространство от дна до поверхности. Этот столбик равномерно «оседает» вниз со скоростью $v(L)$, при этом в момент времени t его верхняя граница находится на глубине $v(L)t$ — на меньшей глубине частиц данного размера нет. На глубине $H < v(L)t$ частицы размера L не вносят вклада в количество частиц ила на один кубический сантиметр — эту величину мы будем в дальнейшем называть концентрацией. Другими словами, на глубине $H = v(L)t$ в концентрацию вносят вклад частицы с размерами больше или равными L. Таким образом, на фиксированной глубине H вклад в концентрацию от частиц определенного размера L постоянен до момента времени T, определяемого условием

$$v(L)T = H \ , \tag{10}$$

а затем обращается в ноль. Из приведенной формулы видно, что в момент времени, для примера, $2T$ концентрация на глубине $2H$ будет такой же, как концентрация на глубине H в момент времени T. Действительно, на глубине $2H$ к этому моменту времени будут те же частицы (буквально те же), что были на глубине H в момент времени T. Возвращаясь к условию задачи: чтобы узнать концентрацию на глубине 0,5 м в момент времени t, можно по графику посмотреть концентрацию на глубине 1 м в момент времени $2t$. Для $t = 5$ мин концентрация равна 50 см$^{-3}$ (т.е. штук на кубический сантиметр) — к этому моменту времени самые тяжелые частицы, которые при $t = 0$ были вблизи поверхности, еще не успели достигнуть глубины 1 м, поэтому плотность не меняется. Для $t = 15$ мин плотность равна приблизительно 12 см$^{-3}$, как следует из графика. Для $t = 28$ мин концентрация равна нулю, т.к. все самые маленькие частицы, которое были в водоеме «утонули» глубже $H = 1$ м.

1. Брусок с грузом

1 вариант решения

- **3 балла** Уравнения равновесия (по **1 баллу** за каждый из трех случаев).
- **1 балл** Верный ответ $m = 500$ г, $\rho = 2$ г/см^3.

2 вариант решения

- **2 балл** Найдена масса груза 500 г.
- **1 балл** Вес груза в воде 250 г.
- **1 балл** Верный ответ $m = 500$ г, $\rho = 2$ г/см^3.

2. Сосуды

- **1 балл** Условие равенства давлений в установившемся состоянии после добавления одного из брусков.
- **1 балл** Уравнение несжимаемости.
- **1 балл** Найдено значение для $\Delta h_{\text{л}} = 1$ см.
- **1 балл** Верный ответ (понизится на $0,5$ см).

3. Роботы

- **1 балл** Идея рассматривать наихудший вариант движения первого робота (рассматриваются скачки или рисуются квадраты).
- **2 балла** Найдены три угловые точки (4, 10), (10, 20), (22, 50) (если найдены две или одна, то 1 балл).
- **1 балл** Найдена оптимальная скорость $2,5$ м/мин.

4. Пружины

- **1 балл** За умение работать с графиком (за любой найденный угловой коэффициент).
- **3 балл** За найденные коэффициенты жесткости $k_1 = 25$ Н/м, $k_2 = 75$ Н/м, $k_3 = 150$ Н/м (**1 балл** за каждый).

5. Стержни

1 вариант решения

- **1 балл** Сравнивается легкая половинка со средней третью.
- **1 балл** За идею использования средней плотности.
- **1 балл** Верный ответ $m = 21$ г.
- **1 балл** Сравнивается легкая половинка с нижней третью.
- **1 балл** За идею использования средней плотности в этом случае.
- **2 балл** Подсчет площадей на графике (по **1 баллу** за график).
- **1 балл** Верный ответ $m = 17$ г.

2 вариант решения

- **1 балл** Сравнивается легкая половинка со средней третью.
- **1 балл** За идею использования средней плотности.
- **1 балл** Верный ответ $m = 21$ г.
- **1 балл** Сравнивается легкая половинка с нижней третью.
- **1 балл** За идею использования средней плотности в этом случае.
- **2 балла** Введение двух параметров для линейной зависимости $\rho(x)$ и два уравнения на них.
- **1 балл** Верный ответ $m = 17$ г.

6. Систематическая ошибка

- **2 балла** Идея проведения какой либо прямой на графике.
- **1 балл** Если проведена прямая из нуля и получен какой-либо численный ответ (в случае верного решения этот балл не учитывается).
- **3 балла** Построена прямая по заданным точкам.
- **3 балла** Ответ с точностью $\pm 0,43$. (с точностью ± 0.86. — **2 балла**, с точностью ± 1.29 — **1 балл**)

7. Пруд

- **2 балла** Рассмотрено движение частицы фиксированного размера с поверхности.
- **2 балла** В концентрацию на глубине вносят вклад частицы только тех размеров, "столбик"которых еще не прошел эту высоту
- **1 балл** Пропорциональность времен глубине рассмотрения.
- **3 балла** Ответ (**1 балл** для каждого времени).