Разбалловка задач 11 класса.

Задача 1 (всего 10 баллов).

A	Вычислено T в случае неподвижных тел	**2 балла**
B	Найдена частота начала движения	**2 балла**
C	Система уравнений на a и T	**2 балла**
D	T в ускоренно движущейся системе	**2 балла**
E	График, две ветви	**1+1 балл**

Задача 2 (всего 10 баллов).

A	Из уравнения Клайперона-Менделеева показано, что $\nu_1:\nu_2:\nu_3=1:2:3$	**1 балл**
B	Условие равновесия поршней (по 2 балла за каждый поршень)	**4 балла**
C	Система 3х уравнений сведена к квадратному уравнению, которое решено; выбран верный корень.	**2 балла**
D	Упомянуто, что полученное решение может не работать	**1 балл**
E	Найдено решение в случае, когда нижний поршень лежит на дне сосуда	**2 балла**

Задача 3 (всего 10 баллов).

A	Рассмотрено движение по окружности **в плоскости, перпендикулярной рисунку**, найдена циклотронная частота	**1 балл**
B	Введены и рассматриваются 3 проекции скорости (по 1 баллу за каждую), а именно: **1)** скорость движения по окружности ωR, слева от OO'; **2)** скорость в проекции на направление магнитного поля, слева от OO'; **3)** скорость в проекции на направление магнитного поля, справа от OO'	**3 балла**
C	Эти скорости связаны между собой через $\cos 2\alpha$, а именно $u \cos 2\alpha = V_0$	**2 балла**
D	Правильно связаны времена движения в левой и правой областях	**2 балла**
E	Ответ содержит произвольное целое число n, соответствующее числу оборотов частицы	**1 балл**
F	Верный ответ	**1 балл**

Задача 4 (всего 10 баллов).

A	Введено поле точечного заряда	**2 балла**
B	Написаны ряды для второго и третьего экспериментов	**1 балл**
C	Использовано $N>>1$	**1 балл**
D	Получено поле во втором эксперименте	**2 балла**
E	Вычислена разность полей второго и третьего экспериментов	**4 балла**

Задача 5 (всего 10 баллов).

A	Полное внутреннее отражение	**1 балл**
B	$n=1/\sin(\alpha)$	**1 балл**
C	Источник на оси симметрии	**1 балл**
D	Источник в точке пересечения линий	**3 балла**
E	Вычислено значение n	**4 балла**

Городской тур 2016/17. 11 класс

Задача 1.

Чтобы тело было неподвижно относительно вращающегося рельса, т.е. двигалось относительно земли по окружности, должны существовать какие-то силы, которые обеспечивают центростремительное ускорение, удерживая тело на круговой орбите. На рис. 1 изображены силы, действующие на тела в горизонтальном направлении. Для тела массой m центростремительную силу $m\omega^2(R+l)$ обеспечит сила натяжения нити T:

$$T = m\omega^2(R+l). \tag{1}$$

Аналогично для тела массой M центростремительная сила $M\omega^2 R$ создаётся разностью силы трения и силы натяжения нити:

$$F_{\text{тр}} - T = M\omega^2 R. \tag{2}$$

В принципе, формула (1) уже содержит ответ — зависимость $T(\omega)$, однако выражение (2) позволяет выразить силу трения, действующую на тело M, и проверить, не начало ли это тело проскальзывать. Чтобы праскальзывания не было, должно выполняться условие $F_{\text{тр}} < \mu M g$, которое можно записать с помощью (1)

$$T + M\omega^2 R = m\omega^2(R+l) + M\omega^2 R < \mu M g \qquad \Rightarrow \qquad \omega < \omega_0 = \sqrt{\frac{\mu M g}{m(R+l)+MR}}.$$

При $\omega = \omega_0$ сила трения достигает максимального значения $\mu M g$, хотя тела еще могут оставаться неподвижными относительно рельса. Если же $\omega > \omega_0$, сила трения $\mu M g$ не способна удерживать тела на постояннам расстоянии от точки O. При этом ответ (1) перестаёт работать.

Рассмотрим теперь случай, когда тела соскальзывают с некоторым ускорением $a > 0$ к краю рельса O$'$. Запишем второй закон Ньютона для каждого тела в проекции на ось OO$'$:

$$ma = m\omega^2(R+l) - T, \qquad Ma = M\omega^2 R + T - \mu M g.$$

Решая эту систему относительно a и T, находим

$$T = \frac{Mm(\omega^2 l + \mu g)}{m+M}. \tag{3}$$

Этот ответ справедлив, если $a > 0$. Можно убедиться, что последнее неравенство выполняется, если $\omega > \omega_0$.

<u>Ответ</u>: Ответ даётся формулой (1) при $\omega \le \omega_0$, где

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\mu M g}{m(R+l)+MR}}.$$

Если $\omega > \omega_0$, ответ даётся формулой (3). Требуемый график $T(\omega)$ представлен сплошной линией на рис. 2; он состоит из двух кусков парабол, сшитых в точке пересечения (ω_0, T_0).

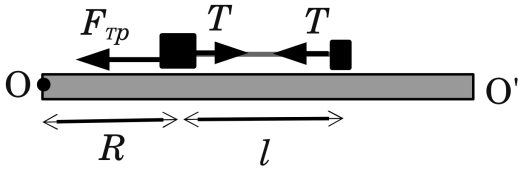

Рис. 1:

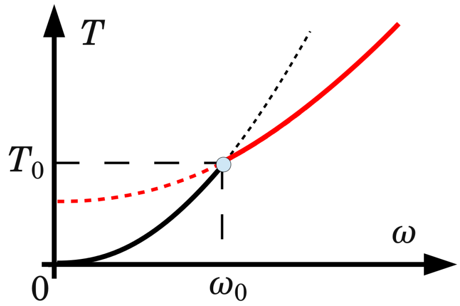

Рис. 2:

Задача 2.

По условию пружины вначале недеформированы, поэтому не действуют на поршни. Это значит, что в начальный момент вес поршней уравновешен только силами давления газа. Из условия равновесия верхнего поршня получаем, что давление газа под ним (в верхнем отсеке) равно $p_0 = mg/S$, где S – площадь поршня. На нижний поршень сверху действует сила давления газа из верхнего отсека $p_0 S = mg$, а снизу – сила давления газа нижнего отсека. Так как разность этих сил уравновешивает вес нижнего поршня mg, значит сила давления в нижнем отсеке равна $2mg$. Поэтому давление газа в нижнем отсеке первоначально равно $2p_0$.

Обозначим давление газа в обоих отсеках после установления равновесия через p. Предположим, после установления равновесия верхняя пружины сожмется на x_1, а нижняя – на x_2. Если на самом деле какая-то пружина не сожмется, а наоборот растянется, это будет соответствовать отрицательному значению x_1 или x_2. С помощью введенных обозначений несложно выразить конечные объёмы отсеков с газом, $V_1 = (L - x_1)S$ и $V_2 = (L - x_2)S$.

Запишем с помощью уравнения Клайперона-Менделеева количество вещества в отсеках в начале, ν_1 и ν_2, а именно, $\nu_1 = p_0 LS/(RT)$, $\nu_2 = 2p_0 LS/(RT)$. Суммарное количество вещества $\nu_1 + \nu_2 = 3p_0 LS/(RT)$ в конце находится при давлении p в объёме $V_1 + V_2$, а температура T по условию не изменилась, поэтому

$$\nu_1 + \nu_2 = \frac{p(V_1 + V_2)}{RT} \qquad \Rightarrow \qquad 3\frac{mg}{S}L = p(2L - x_1 - x_2). \tag{4}$$

В конце, после установления равновесия, силы, действующие на каждый поршень, снова скомпенсированы. Для верхнего поршня это теперь условие

$$mg = pS + kx_1. \tag{5}$$

Нижний же поршень в конце испытавает равное давление газа p сверху и снизу, поэтому вес его скомпенсирован разницей сил натяжения пружин:

$$mg + kx_1 = kx_2. \tag{6}$$

Разрешим систему уравнений (4-6). Для дальнейшего анализу удобно избавиться от большого количества размерных параметров, введя относительное сжатие пружин $\alpha_{1,2} = x_{1,2}/L$ — это позволит сократить L в (4). В оставшихся двух уравнениях переход к $\alpha_{1,2}$ позволяет выделить безразмерный параметр $a = mg/(kL)$, и система (4-6) принимает вид

$$3a = \frac{pS}{kL}(2 - \alpha_1 - \alpha_2), \qquad a = \frac{pS}{kL} + \alpha_1, \qquad a + \alpha_1 = \alpha_2. \tag{7}$$

Выражая здесь из второго уравнения величину $pS/(kL) = a - \alpha_1$, и подставляя её в первое уравнение вместе с α_2 из третьего, получим квадратное уравнение на α_1:

$$3a = (a - \alpha_1)(2 - a - 2\alpha_1).$$

Раскрывая скобки, $2\alpha_1^2 - (a+2)\alpha_1 - a(a+1) = 0$, находим два решения для верхней пружины:

$$\alpha_1 = \frac{a + 2 \pm \sqrt{(a+2)^2 + 8a(a+1)}}{4} = \frac{a + 2 \pm (3a+2)}{4}.$$

Легко видеть, что если взять «решение с плюсом», получится $\alpha_1 = 1 + a$. Но a – положительная величина, а относительное сжатие α_1 не может превышать 1 (также как обычное сжатие x_1 не может превысить длину недеформированной пружины L). Значит, такое решение нефизично (можно также убедиться, что его использование приводит к отрицательному p). Зато решение «с минусом» даёт вполне физический ответ $\alpha_1 = -a/2$, $\alpha_2 = a/2$.

Итак, казалось бы решение найдено: верхняя пружина растянется на $x_1 = L\alpha_1 = mg/(2k)$, а нижняя настолько же сожмётся. Однако, следует учесть, что относительное сжатие второй пружины $\alpha_2 = a/2$ также не должно превышать 1, поэтому построенное решение нефизично при $a > 2$.

В этом случае нижний поршень просто лежит на дне сосуда, так как жёсткости пружин не хватает, чтобы удержать его на весу. Уравнение (6) теперь не выполняется, вместо него следует положить $x_2 = L$ (или $\alpha_2 = 1$). Вместо системы уравнений (7) имеем теперь

$$3a = \frac{pS}{kL}(1-\alpha_1), \qquad a = \frac{pS}{kL} + \alpha_1.$$

В ней снова можно выразить pS/kL из второго уравнения, подставить в первое и решить получившееся квадратное уравнение $3a = (a-\alpha_1)(1-\alpha_1)$ относительно α_1:

$$\alpha_1^2 - (a+1)\alpha_1 - 2a = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_1 = \frac{a+1 \pm \sqrt{(a+1)^2+8a}}{2}.$$

Решение «с плюсом» снова следует отбросить, поскольку оно заведомо больше единицы. Верхний поршень при этом будет находиться над дном на расстоянии $L - L\alpha_1$.

Ответ: Если $mg/(kL) \le 2$, верхний поршень не сдвигается, а нижний опускается на $mg/(2k)$. Если $mg/(kL) > 2$, нижний нижний поршень лежит на дне, а верхний располагается на высоте

$$L\frac{\sqrt{a^2+10a+1}+1-a}{2}, \qquad a = \frac{mg}{kL}.$$

Задача 3.

Частица в однородном магнитном поле может двигаться по спирали, по окружности или по прямой. Движение по прямой имеет место, когда скорость частицы параллельна линиям индукции магнитного поля. По условию такое движение реализуется после того, как частица пересечёт в некоторой точке К плоскость OO$'$. Слева же от плоскости частица будет, очевидно, двигаться по спирали: в проекции на направление магнитного поля в этой области движение будет равномерным (обозначим соответствующую проекуию скорости V_0), а в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, частица будет вращаться по окружности с угловой скоростью $\omega = qB_0/m$ (см. рис. 3). Иными словами, в левой области траектория частицы «намотана» на цилиндр.

Введем систему координат A_1xyz так, что ось A_1z совпадает с направлением магнитного поля в левой полуплоскости, а оси A_1x и A_1y перпендикулярны ей, причем A_1x лежит в плоскости рис. 4, а ось Oy перпендикулярна рисунку.

В момент пересечения OO$'$ частица в точке К должна иметь скорость $\vec{u}$, направленную вдоль поля в правой области. Так как это поле лежит в плоскости рисунка, проекция $u_y = 0$, а $u_x = \omega R$. Проекция скорости на направление A_1z не менялась с момента старта, значит $u_z = V_0$. Так как угол между $\vec{u}$ и осью Oz равен 2α,

$$u = \frac{V_0}{\cos 2\alpha}.$$

Далее частица летит вдоль $\vec{u}$, не покидая плоскость рисунка 4, и по условию попадает в точку A_2. Это значит, точки A_1, A_2 и К лежат в плоскости рисунка 4, перпендикулярной OO$'$. Это означает, что

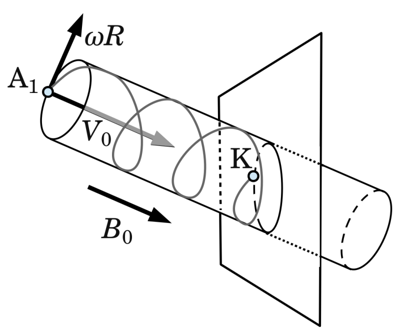

Рис. 3:

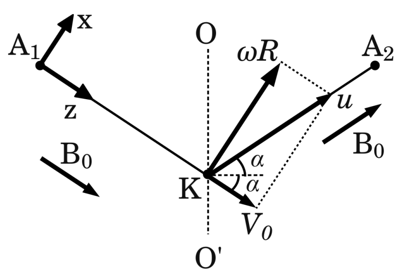

Рис. 4:

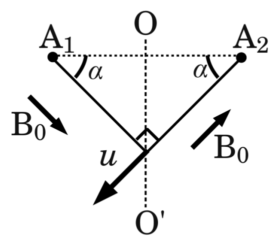

Рис. 5:

двигаясь по спирали между A_1 и K, частица совершила некоторое целое число оборотов n. Для этого ей потребуется время

$$t_1 = \frac{2\pi n}{\omega}.$$

За это время частица сдвинется вдоль оси Oz на расстояние $L = V_0 t_1$.

Перемещение частицы в правой области также равно L. Двигаясь по прямой с постоянной скоростью u, она преодолеет путь L за вермя

$$t_2 = \frac{L}{u} = \frac{L \cos 2\alpha}{V_0} = t_1 \cos 2\alpha.$$

Таким образом, суммарное время движения частицы составит

$$t_1 + t_2 = t_1(1 + \cos 2\alpha) = \frac{2\pi n(1 + \cos 2\alpha)}{\omega}, \qquad \omega = \frac{qB_0}{m}.$$

Следует отметить, что описанное в условии задачи движение возможно не при всех значениях α. Проще всего это понять, обратив движение частицы во времени, т.е. рассмотрев, как частица со скоростью u двигалась прямолинейно и влетела в левую область (см. рис. 5). Например, при $\alpha = 45^\circ$ частица влетит в левую область перпендикулярно линиям магнитного поля, поэтому никак не сможет сместиться вдоль магнитного поля. В этом случае частица пролетит в левой области по дуге окружности и снова вылетит в правую область.

Можно выписать строгое условие на α, при выполнении которого частица действительно сможет двигаться описаным в задаче способом. Однако разрешить это условие можно только численно. Величина α, удовлетворяющая этому условию, не должна превосходить $\simeq 17.4^\circ$, однако, нахождение этого граничного значения не предполагалось.

Ответ: Так как по условию задачи такое движение частицы оказалось возможным, она могла затратить на него время

$$\frac{2\pi mn(1 + \cos 2\alpha)}{qB_0},$$

где n – произвольное целое число.

Задача 4.

Введём координатную ось, начинающуюся в точке O и направленную вдоль OA. Обозначим координату точки A через L, а расстояние между соседними зарядами в цепочке через a. Пусть величина точечных зарядов, которыми оперирует Ждун, равна q. Для определенности будем считать, что $q > 0$. Тогда в первом опыте напряжённость в точке O будет, очевидно, равна $E_1 = -kq/L^2$; знак показывает, что E_1 направлена влево, против направления введённой оси координат.

Чтобы найти напряжённость в точке O во втором опыте, введём функцию $E(x)$, которая показывает, как зависит напряжённость, создаваемая полубесконечной цепочкой зарядов в начале координат, от координаты x точки, в которой начинается цепочка. С одной стороны понятно, что во втором опыте Ждун обнаружит напряжённость E_2 равую $E(L)$. С другой стороны, полубесконечную цепочку зарядов можно разбить на две подсистемы (см. рис. 6): заряд q в точке A и вспомогательную полубесконечную цепочку зарядов, начинающуюся в точке с координатой $L + a$. Построенная таким образом вспомогательная цепочка может быть получена сдвигом вправо исходной цепочки на величину a и сменой знаков всех зарядов на противоположные. Поэтому и напряженность, которую вспомогательная цепочка создаёт в начале координат, можно получить из напряженности исходной цепочки, увеличив координату точки A на a и сменив знак напряжённости. Иными словами, вспомогательная цепочка создаёт в точке O напряжённость $-E(L + a)$.

По принципу суперпозиции напряжённость во втором опыте $E_2 = E(L)$ можно представить как векторную сумму напряжённости E_1 точечного заряда (расположенного в точке A) и напряжённости вспомогательной цепочки:

$$E(L) = E_1 - E(L + a) \qquad \Rightarrow \qquad E(L) + E(L + a) = E_1. \tag{8}$$

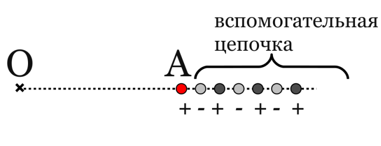

Рис. 6:

Так как по условию $L/a = N >> 1$, т.е. $L >> a$, величины L и $L + a$
мало отличаются, а значит значения $E(L)$ и $E(L+a)$ в (8) отличаются мало. Более строго можно написать, что при малых a функция $E(L + a)$ отличается от $E(L)$ на величину, которая определяется производной рассматриваемой функции,

$$\frac{E(L+a) - E(L)}{a} \simeq \frac{dE(L)}{dL} \qquad \Rightarrow \qquad E(L+a) \simeq E(L) + a\frac{dE(L)}{dL} = E(L) + \frac{L}{N}\frac{dE(L)}{dL},$$

где при фиксированном L последнее слагаемое становится всё меньше с ростом N.

Таким образом соотношение (8) можно переписать в виде

$$E(L) + E(L) + a\frac{dE(L)}{dL} \simeq E_1 = \frac{kq}{L^2}. \tag{9}$$

Отбрасывая слагаемое с производной, которое, как мы показали, мало при больших N, вычисляем $E(L) \simeq E_1/2$, т.е. во втором опыте напряжённость $E_2 = E(L)$ уменьшится по сравнению с E_1 на 50%.

Заметим, что мы получили ответ для напряжённости во втором опыте, не зависящий от a. Так получилось, потому что мы считали, что N очень велико, и $E(L) \simeq E(L + a)$. Но отсюда следует, что напряженность в третьем опыте не изменится по сравнению с напряжённостью во втором! На самом деле, это, конечно, не так: напряжённость изменится на малую величину, которую можно оценить, если учесть разницу между $E(L)$ и $E(L + a)$. Иными словами, отбрасывание вклада с производной, мало изменит ответ на первый вопрос, однако ответ на второй вопрос пропадает (обращается в ноль), если пренебречь этим вкладом. Значит, чтобы найти ответ на второй вопрос, следует обращаться с выражением (9) более аккуратно.

Вычисляя значение $E(L) \simeq E_1/2 = kq/(2L^2)$, мы пренебрегли вкладами, содержащими множитель $a/L = 1/N << 1$. Попробуем учесть такой вклад в $E(L)$:

$$E(L) = \frac{kq}{2L^2}\left(1 + \frac{\beta a}{L}\right), \tag{10}$$

где β – некоторая пока неизвестная нам безразмерная величина. Введённое второе слагаемое в скобках, конечно, мало по сравнению с первым слагаемым, однако, будем его теперь учитывать. Производная этой функции будет иметь вид

$$\frac{dE(L)}{dL} = -\frac{kq}{L^3} - \frac{3kq\beta a}{2L^4}.$$

Подставим эти выражения для $E(L)$ и $dE(L)/dL$ в (9), чтобы подобрать константу β. Это позволит нам использовать уточнённую формулу для напряженности (10). Подстановка даёт:

$$2\left(\frac{kq}{2L^2} + \frac{kq\beta a}{2L^3}\right) + a\left(-\frac{kq}{L^3} - \frac{3kq\beta a}{2L^4}\right) = \frac{kq}{L^2}.$$

Первое слагаемое в левой части сокращает правую часть, остаётся

$$\frac{kq\beta a}{L^3} - \frac{kqa}{L^3} - \frac{3kq\beta a^2}{2L^4} = 0.$$

Сокращение на a/L^3 даёт

$$kq\beta - kq - \frac{3\beta a}{L} = 0.$$

Видно, что последнее слагаемое в левой части содержит по сравнению с остальными множитель a/L, т.е. является мало по сравнению с ними. Отсюда можно написать $kq\beta - kq \simeq 0$, значит $\beta = 1$.

Теперь осталось сравнить 2й и 3й опыты.

Формула (10) показывает, что во втором опыте напряженность будет равна

$$E_2 = \frac{kq}{2L^2}\left(1 + \frac{\beta a}{L}\right),$$

а в третьем

$$E_3 = \frac{kq}{2L^2}\left(1 + \frac{\beta a}{KL}\right),$$

поэтому разница между этими значениями, с учетом $\beta = 1$, составит

$$\Delta E = \frac{kq}{2L^2}\frac{a}{L}\left(1 - \frac{1}{K}\right) = \frac{E_2(K-1)}{KN}.$$

Теперь несложно посчитать, сколько процентов эта величина составляет от E_2, причем величину E_2 можно считать равной $kq/(2L^2)$, отбрасывая малую поправку с множителем β.

Заметим, что хотя выражение (10) уточняет значение напряженности по сравнению с формулой $E(L) = kq/(2L^2)$, оно также содержит приближение, а именно, мы считали, что β – не зависящая от N безразмерная константа. На самом деле точное выражение для $E(L)$ можно представить в виде ряда

$$E(L) = \frac{kq}{2L^2}\left(1 + \frac{\beta a}{L} + \frac{\gamma a^2}{L^2} + \frac{\delta a^3}{L^3} + \ldots\right),$$

в котором каждое последующее слагаемое мало, по сравнению с предыдущими. Последовательный подбор всё меньших и меньших слагаемых, приводящий к постепенному уточнению физического результата является очень важным методом в физике и называется "теория возмущений".

Ответ: Во втором случае напряжённость изменится на 50%, в третьем — на $(K-1)/(NK) \cdot 100\%$.

Задача 5.

Обозначим искомый коэффициент преломления n. Если луч света попадает на шар изнутри под углом, большим чем угол полного внутреннего отражения $\alpha = \arcsin(1/n)$, он отразится от границы шара. Далее, он снова упадёт на границу раздела под тем же углом и снова отразится, так что покинуть шар такой луч не сможет.

На рис. 7 мы представили ход луча, исходящего из источника, который падает на поверхность в точности под углом α. Понятно, что точка A будет находиться где-то на границе светлой и темной областей поверхности шара, потому что с одной стороны от точки A луч от источника будет падать на поверхность шара под меньшим углом, чем α, а с другой — под большим.

Очевидно, верно и обратное: если точка лежит на границе светлой и тёмной области, то луч света от источника попадает в эту точку под углом α. По условию точки, лежащие на границе, образуют на шаре два круга вокруг противоположных точек шара, полюсов. Из симметрии понятно, что источник света лежит где-то на прямой, соединяющей полюса. При этом лучи от источника падают на круговую границу светлого и тёмного под одним и тем же углом α.

Глядя на картинку 8, можем заключить, что свет, падающий из источника в точки A и B, лежащие на границе, должен попадать туда под одинаковыми углами, равными α. Это возможно либо если источник

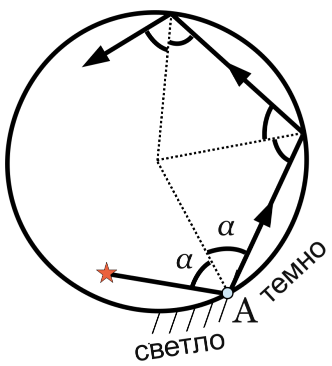

Рис. 7:

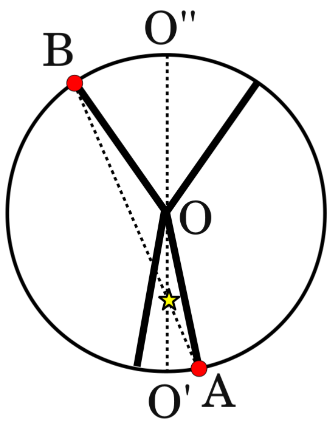

Рис. 8:

света лежит на прямой AB (и при этом ∠ABO= ∠BAO= α), либо если источник располагается где-то на биссектрисе угла AOB. Однако, из симметрии мы уже заключили, что источник лежит на отрезке O′O″, который не пересекается с упомянутой биссектрисой, т.е. второй вариант невозможен. Итак, пересечение AB и O′O″ даёт положение источника.

По условию ∠O′OA= φ_1, ∠O″OB= φ_2. Значит ∠BOA= $\pi - \varphi_2 + \varphi_1$. Также мы доказали, что ∠ABO и ∠BAO равны α, значит из △OAB справедливо ∠BOA= $\pi - 2\alpha$. Отсюда

$$\angle \mathrm{BOA} = \pi - \varphi_2 + \varphi_1 = \pi - 2\alpha, \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} = 15^\circ.$$

Зная α, легко найти ответ

$$n = \frac{1}{\sin 15^\circ} = \sqrt{\frac{2}{1 - \cos 30^\circ}} = \frac{2}{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}.$$

Ответ: Коэффициент преломления равен примерно $3,86$.