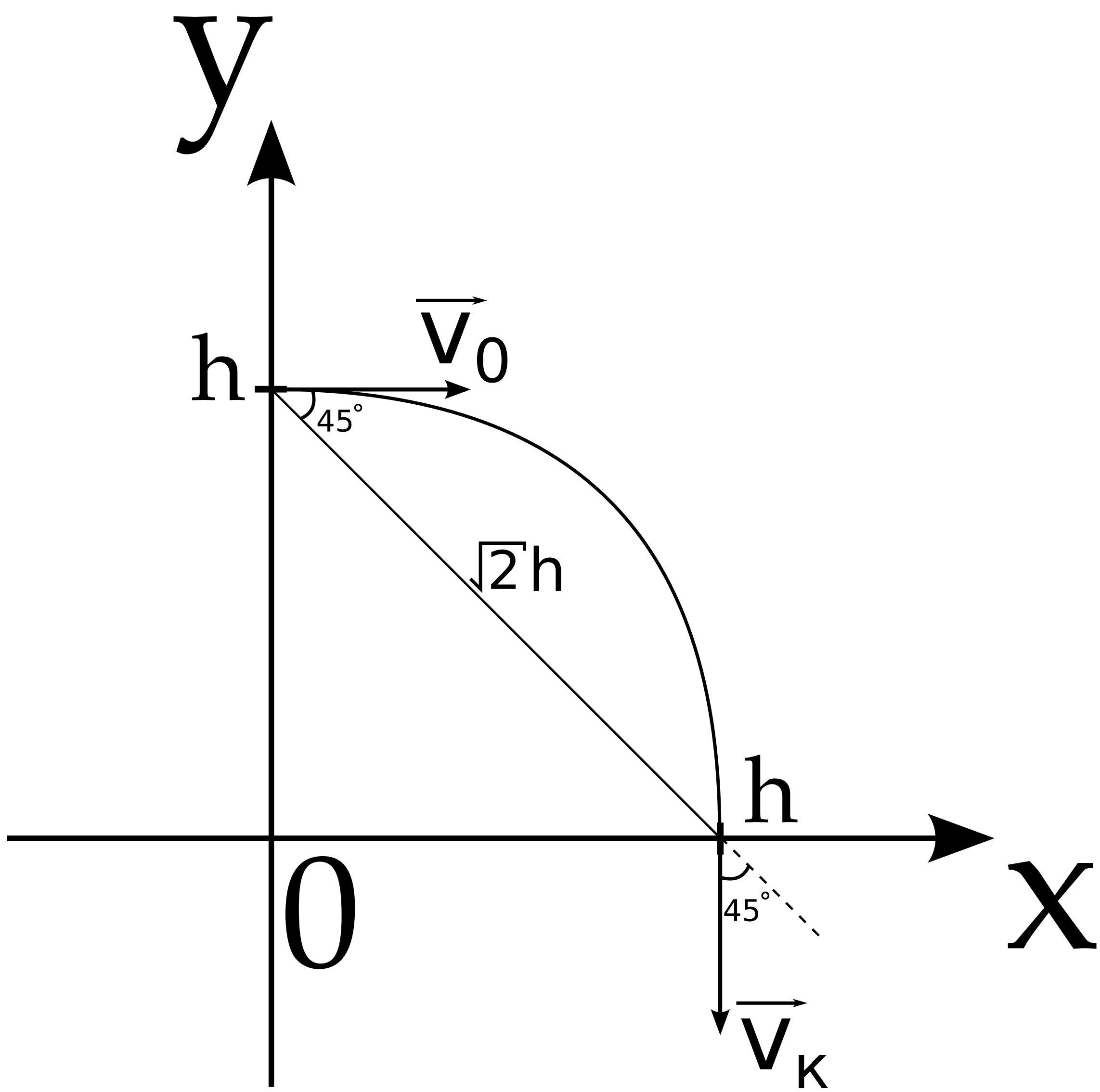
2016. 9 класс

Задача 1.

Рассмотрим движение шайбы в первой четверти. Будем искать такую траекторию, что движение в остальных четвертях будет аналогичным движению в первой. Для этого достаточно, чтобы шайба пересекала ось X при выходе из первой четверти в точке $(h, 0)$ и двигалась со скоростью, по модулю равной начальной и направленной под тем же углом, что и начальная (но уже по отношению к другой оси). Тогда движение во второй четверти будет аналогичным движению в первой. А тогда движение в третьей четверти будет аналогичным движению во второй, а движение в четвёртой — аналогичным движению в третьей. И получится замкнутая траектория, ведь при выходе из 4 четверти шайба будет находиться в точке $(h, 0)$ и двигаться с начальной скоростью.

Выпустим шайбу с начальной скоростью $\vec{v}_0$, перпендикулярной оси Y:



Заметим, что движение шайбы в плоскости с постоянным ускорением $\vec{a}$ аналогично движению тела в поле тяжести плоской земли с ускорением свободного падения $\vec{a}$. Поэтому рассмотрим тело, брошенное под углом 45° к горизонту. Его горизонтальная составляющая скорости сохраняется, а по закону сохранения энергии, если оно приземлится на том же уровне, что и стартовало, то модуль его скорости окажется равным модулю начальной скорости. Поэтому единственное ограничение, что накладывается на данное тело — оно должно приземлиться на расстоянии $\sqrt{2}h$ от места бросания.

Тогда имеем соотношение на горизонтальную составляющую скорости: $\dfrac{1}{\sqrt{2}}v_0 t = \sqrt{2}h \quad \Rightarrow \quad v_0 = \dfrac{2h}{t}$, где t — это время полёта тела до приземления. Можно написать уравнение перемещения тела по вертикальной оси (противонаправленной ускорению $\vec{a}$): $\Delta r = \dfrac{1}{\sqrt{2}}v_0 t - \dfrac{at^2}{2}$, и тогда, так как $\Delta r = 0$, получаем $\frac{1}{\sqrt{2}}v_0 t = \frac{at^2}{2}$. Соотнося полученные уравнения имеем в итоге:

$$\begin{cases} \sqrt{2}h = \dfrac{at^2}{2} \\ v_0 = \dfrac{2h}{t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = \sqrt{\dfrac{2\sqrt{2}h}{a}} \\ v_0 = \sqrt{\sqrt{2}ha} \end{cases}$$

А период такого движения, или время одного оборота будет $4t$.

Задача 2.

1. Найдём, сколько дождевой воды попадает на лёд за время t. Капли дождя за это время пролетят расстояние vt, значит, на поверхность сосуда попадёт объём дождевой воды, равный vtS. Поэтому масса попавшей на поверхность воды будет равна ρvtS.

   Теперь запишем уравнение теплового баланса для льда, который успел расплавиться за время t.

   В лёд попало ρvtS воды при температуре T_0, которая затем остыла до температуры $0°C$. Таким образом от воды пришло $c_{\text{в}}\rho vtS(T_0 - 0)$ тепла. Тут мы пренебрегаем кинетической энергией капель. Ведь кинетическая энергия 1 кг воды, летящей со скоростью $20\frac{\text{м}}{\text{с}}$ (настоящие капли движутся медленнее) равна $\frac{1\cdot 400}{2}$ Дж. Её хватит, чтобы расплавить массу льда, равную $\frac{200}{3{,}4\cdot 10^5}$ кг $\approx 0,6$ г. Поэтому такое пренебрежение уместно.

   Тепло, пришедшее в лёд из воздуха за это время будет равно $k\Delta Tt = k(T_0 - 0)t$, ведь температура смеси льда и воды постоянна и равна $0°C$. Тут надо заметить, что в первые моменты, пока лёд практически не растаял, а дождевая вода не успела налиться сверху в достаточном количестве, тепло будет переходить не из воздуха в воду, а из воздуха в лёд. Однако, промежуток времени, пока это действительно будет так, мал, ведь за это время растает лишь малая часть льда.

   Всё тепло, пришедшее в лёд, идёт на его плавление. За время t расплавилась масса льда m, поэтому уравнение теплового баланса выглядит следующим образом:

   $$c_{\text{в}}\rho vtST_0 + kT_0t = m\lambda$$

   Отсюда получаем время плавления: $t = \frac{m\lambda}{c_{\text{в}}\rho vST_0 + kT_0}$

2. Изменение массы льда выражается через время до того, как температура станет нулём (пусть τ), линейно, ведь за это время на поверхности льда намёрзнет масса, равная $\rho v\tau S$, и, так как ответ зависит от массы льда линейно, изменение времени плавления льда легко выразить через τ:

   $$\Delta t_{\text{плавл}} = \frac{\Delta m\lambda}{c_{\text{в}}\rho vST_0 + kT_0} = \frac{\rho vS\lambda}{c_{\text{в}}\rho vST_0 + kT_0}\tau$$

   Итак, значит, время плавления льда изменится на $\Delta t_{\text{плавл}}$. Но в изменение ответа входит ещё τ, время до того момента, как температура льда станет равной $0°C$. Найдём его.

   Итак, изначальная температура мало отличается от нулевой, поэтому можно считать её изменение линейным по времени. В начальный момент температура T_x, через время τ она $0°C$. Поэтому эта линейная зависимость: $T(t) = T_x + \alpha t$, $\alpha = \frac{T_x}{\tau}$. Тогда напишем уравнение теплового баланса для нагревания льда за время $\mathrm{d}t$, его температура меняется с T на $T + \mathrm{d}T = T + \alpha\mathrm{d}t$.

   Тепло, которое забрал лёд, равно $Q = c_{\text{л}}m\alpha\mathrm{d}t$. Мы считаем тут массу льда постоянной, ведь по условию её изменение за всё время нагревания много меньше её самой. Заметим, что получившееся выражение первого порядка малости. Дальнейшие вычисления будем проводить с той же точностью.

   Тепло, полученное льдом из капель будет равно $Q_1 = \rho v\mathrm{d}tS\left(c_{\text{в}}(T_0 - 0) + \lambda + c_{\text{л}}(0 - T_x)\right)$ (капли остывают, замерзают и остывают ещё). С учётом соотношений, данных в условии, понимаем, что первое и третье слагаемые малы по сравнению со вторым. Поэтому остаётся $Q_1 \approx \rho v\mathrm{d}tS\lambda$.

   Тепло, полученное льдом из воздуха за этот короткий промежуток времени будет $Q_2 = \tilde{N}_{\text{ср}}\mathrm{d}t = \tilde{k}(T_0 - T - \frac{1}{2}\alpha\mathrm{d}t)\mathrm{d}t$. Оставляя только члены первого порядка малости, получаем $Q_2 = \tilde{k}(T_0 - T)\mathrm{d}t$. Далее заметим, что по условию изменение T много меньше $T_0 - 0$, поэтому вычитаемое в скобках можно опустить. Окончательно, $Q_2 = \tilde{k}T_0\mathrm{d}t$.

   Итоговое уравнение теплового баланса:

   $$Q_1 + Q_2 = Q$$

   $$\rho v\mathrm{d}tS\lambda + \tilde{k}T_0\mathrm{d}t = c_{\text{л}}m\alpha\mathrm{d}t$$

Сокращая dt, выразим α:

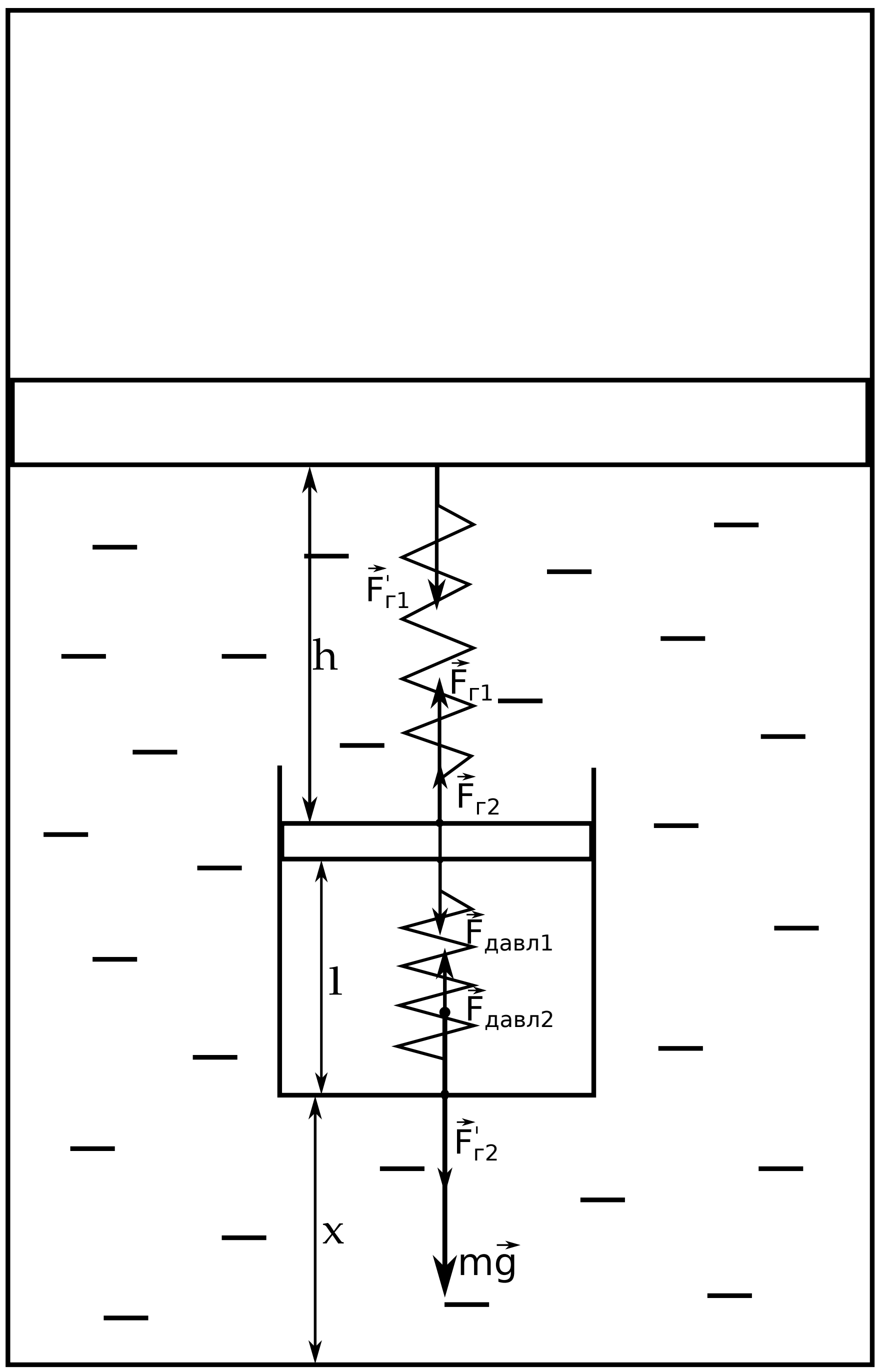
$$\alpha = \frac{\rho v S \lambda + \tilde{k} T_0}{c_{\text{л}} m}$$

А теперь можно получить ответ:

$$\Delta t = \tau + \Delta t_{\text{плавл}} = \tau \left(1 + \frac{\rho v S \lambda}{c_{\text{в}} \rho v S T_0 + k T_0}\right) = \frac{T_x}{\alpha} \left(1 + \frac{\rho v S \lambda}{c_{\text{в}} \rho v S T_0 + k T_0}\right) = \frac{T_x c_{\text{л}} m}{\rho v S \lambda + \tilde{k} T_0} \left(1 + \frac{\rho v S \lambda}{c_{\text{в}} \rho v S T_0 + k T_0}\right)$$

Задача 3.

Обозначим имеющиеся силы в системе. Будем считать, что первая пружина растянута, а вторая сжата. Если это не так, мы получим отрицательное значение силы, а это будет значить, что она направлена в другую сторону. Тут сразу следует заметить, что первая пружина растянута, а потому поршень давит на воду. В самом деле, иначе суммарная сила, действующая на сосуд без учёта первой пружины была бы направлена вверх (или равна нулю), а тогда сила тяжести была бы не больше силы Архимеда, действующей на сосуд. То есть $mg \leq \rho g V \quad \Rightarrow \quad m \leq \rho l S_2$, где l —длина второй пружины. Но, значит, $l \geq \frac{m}{\rho S_2} = \frac{1}{1000 \cdot 0{,}01} = 0{,}1$ м $= 10$ см. То есть вторая пружина не сжата. Но ведь на неё сверху давит столб воды. Противоречие. Значит, действительно, первая пружина растянута, и верхний поршень давит на воду. Итак, обозначим силы:



Теперь напишем выражения для сил с учётом обозначений, указанных на рисунке:

$$F_{\text{г}1} = F'_{\text{г}1} = k_1(h - l_1)$$
$$F_{\text{г}2} = k_2(l_2 - l)$$
$$F_{\text{давл}1} = P \cdot S_2$$
$$P = P_{\text{воды}} + P_{\text{поршня}},$$

где $P_{\text{воды}}$ — давление столба воды, $P_{\text{поршня}}$ — давление поршня на воду. Заметим, что на поршень действует лишь одна сила (кроме создаваемой водой) — сила Гука первой пружины, а значит, давление, создаваемое поршнем равно $\dfrac{F_{\text{г}1}}{S_1}$. Значит, итоговая сила давления воды сверху:

$$F_{\text{давл}1} = \left(\rho g h + \frac{k_1(h - l_1)}{S_1}\right) S_2$$

А сила давления воды снизу:

$$F_{\text{давл}2} = \left(\rho g (h + l) + \frac{k_1(h - l_1)}{S_1}\right) S_2$$

Теперь можно написать второй закон Ньютона для меньшего поршня и для меньшего сосуда (в проекциях на вертикальную ось:

$$\begin{cases} F_{\text{г}1} + F_{\text{г}2} = F_{\text{давл}1} \\ F_{\text{г}2} + mg = F_{\text{давл}2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_1(h - l_1) + k_2(l_2 - l) = \rho g h S_2 + k_1(h - l_1)\frac{S_2}{S_1} \\ k_2(l_2 - l) + mg = \rho g h S_2 + \rho g l S_2 + k_1(h - l_1)\frac{S_2}{S_1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} l_2 - l = \dfrac{\rho g h S_2 + k_1(h - l_1)\dfrac{S_2}{S_1} - k_1(h - l_1)}{k_2} \\ mg = \rho g l S_2 + k_1(h - l_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} l = l_2 - \dfrac{\rho g h S_2 + k_1(h - l_1)\dfrac{S_2}{S_1} - k_1(h - l_1)}{k_2} \\ mg = \rho g \left(l_2 - \dfrac{\rho g h S_2 + k_1(h - l_1)\dfrac{S_2}{S_1} - k_1(h - l_1)}{k_2}\right) S_2 + k_1(h - l_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} l = l_2 - \dfrac{\rho g h S_2 + k_1(h - l_1)\dfrac{S_2}{S_1} - k_1(h - l_1)}{k_2} \\ mg - \rho g l_2 S_2 + \rho g S_2 l_1 \frac{k_1}{k_2}\frac{S_1 - S_2}{S_1} + k_1 l_1 = \rho g S_2 \left(-h\dfrac{\rho g S_2}{k_2} + h\frac{S_1 - S_2}{S_1}\frac{k_1}{k_2}\right) + k_1 h \end{cases}$$

Отсюда найдём h:

$$h = \frac{mg - \rho g S_2 l_2 + \rho g S_2 l_1 \frac{S_1 - S_2}{S_1}\frac{k_1}{k_2} + k_1 l_1}{-\frac{\rho^2 g^2 S_2^2}{k_2} + \rho g S_2 \frac{S_1 - S_2}{S_1}\frac{k_1}{k_2} - k_1} = l_1 \frac{\rho g S_2 \frac{S_1 - S_2}{S_1}\frac{k_1}{k_2} - k_1}{\frac{\rho^2 g^2 S_2^2}{k_2} + \rho g S_2 \frac{S_1 - S_2}{S_1}\frac{k_1}{k_2} + k_1} =$$
$$= l_1 \frac{1000 \cdot 10 \cdot 0{,}01 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} + 100}{-\frac{10^6 \cdot 10^2 \cdot 10^{-4}}{200} + 1000 \cdot 10 \cdot 0{,}01 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} + 100} = l_1 \cdot \frac{14}{9} = 14 \text{ см}$$

И после этого l:

$$l = l_2 - \frac{\rho g h S_2 + k_1(h - l_1)\dfrac{S_2}{S_1} - k_1(h - l_1)}{k_2} = 0,1 - \frac{1000 \cdot 10 \cdot 0,14 \cdot 0,01 + 100(0,14 - 0,09)\frac{1}{5} - 100(0,14 - 0,09)}{200} =$$

$$= 0,1 - \frac{14 + 1 - 5}{200} = 0,05 \text{ м} = 5 \text{ см}$$

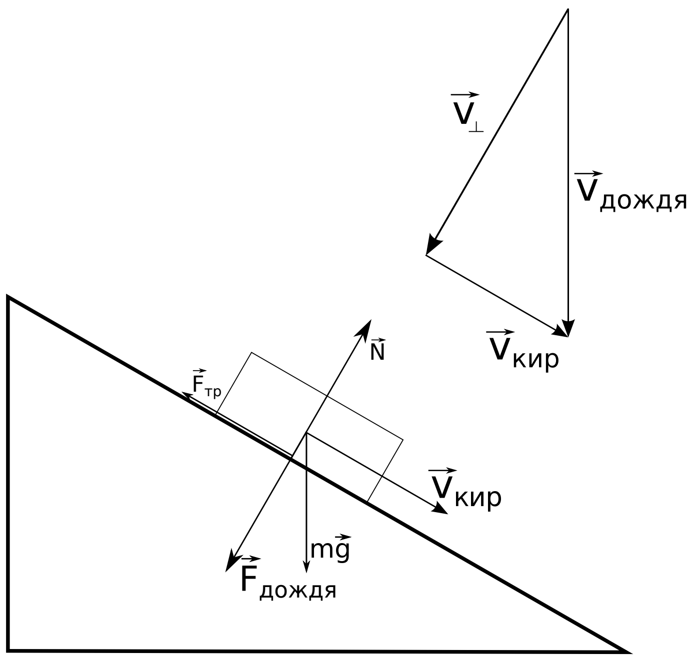
Теперь найдём высоту всего сосуда. Объём большего сосуда складывается из объёма воды и объёма меньшего сосуда. Высоту сосуда можно вычислить как отношение объёма к площади сечения:

$$h = \frac{V_\text{в} + l \cdot S_2}{S_1} = \frac{2000 + 5 \cdot 100}{500} = 41 \text{ см}$$

И окончательно, расстояние от дна одного сосуда до дна другого получается $41 - 14 - 5 = 22$ см.

Задача 4.

Рассмотрим движение капель воды, попавших на кирпич. Сначала они летели вертикально вниз, но, после попадания на кирпич, стали двигаться со скоростью кирпича. Однако, все капли попадали лишь на верхнюю поверхность кирпича, а значит, в системе отсчёта кирпича капли движутся перпендикулярно его поверхности. Итак, тогда разность скоростей кирпича и капли направлена перпендикулярно плоскости горки. Тогда имеем треугольник скоростей:



Найдём силу, с которой дождь давит на кирпич. Эта сила направлена перпендикулярно поверхности горки, а найти её значение можно следующим образом. Как известно, $F = \frac{\Delta P}{\Delta t}$, где ΔP — изменение импульса. Заметим, что в данном случае по оси y импульс капель становится равным нулю. Поэтому по этой оси изменение импульса равно импульсу упавших капель. За время Δt на поверхность кирпича попадут капли, находившиеся на расстоянии от его поверхности $\leq v_{\perp}\Delta t$. Значит, объём упавшей воды за это время будет $Sv_{\perp}\Delta t$. Значит, $\Delta P = \rho S v_{\perp}^2 \Delta t$. Тогда сила $F = \rho S v_{\perp}^2$.

Теперь запишем второй закон Ньютона для кирпича в проекциях на оси, параллельную и перпендикулярную поверхности горки:

$$\begin{cases} -F_{тр} + mg\sin\alpha = 0 \\ N - mg\cos\alpha - F_{дождя} = 0 \end{cases}$$

Вспомним, что $F_{тр} = \mu N, F_{дождя} = \rho S v_{\perp}^2$. Подставим:

$$\begin{cases} \mu N = mg\sin\alpha \\ N = mg\cos\alpha + \rho S v_{\perp}^2 \end{cases}$$

$$\frac{1}{\mu} mg\sin\alpha = mg\cos\alpha + \rho S v_{\perp}^2$$

В итоге получаем:

$$v_{\perp} = \sqrt{\frac{mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{\mu\rho S}}$$

Из треугольника скоростей имеем:

$$\begin{cases} v_{кирпича} = v_{\perp}\mathrm{tg}\alpha \\ v_{дождя} = \dfrac{v_{\perp}}{\cos\alpha} \end{cases}$$

Задача 5.

Сначала найдём сопротивление R_x. Начальное напряжение батарейки 5 В, начальное показание вольтметра $1,5$ В. Значит, напряжение на искомом резисторе в этот момент $3,5$ В. Найдём начальный ток через него. Ток через R_1 и R_2 найти несложно. Напряжение на них $1,5$ В, значит, ток через R_1 получится $I_1 = \frac{1,5}{1000} = 1,5$ мА, а через R_2 — $I_2 = \frac{1,5}{500} = 3$ мА. Тогда общий ток $4,5$ мА, а ток через N из графика 1 мА. Значит, сопротивление $R_x = \frac{3,5}{(4,5-1)\cdot 10^{-3}} = 1$ кОм.

Найдём теперь зависимость тока от времени на R_x. Пусть показание вольтметра в некоторый момент U, а ток через нелинейный элемент I. Тогда ток через R_1 и R_2: $\frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} = 3U$. Значит, ток через R_x выражается как $3U - I$. Домножим график зависимости показаний вольтметра от времени на 3, вычтем из него график зависимости тока через N, и полученную зависимость возведём в квадрат. Получится график зависимости I_x^2 от времени. Найдём площадь под ним, умножим на R_x, и получим тепло, выделенное на резисторе. Итоговый ответ: $Q = 108$ Дж.