Теоретический тур 2015/2016. 11 класс

Задача 1.

Обозначим жёсткость исходных резинок k. Удобно также ввести $\beta = \alpha/2$.

Пусть резинка AB растянулась в требуемом положении на Δl, а каждая из половинок второй резинки – куски BC и BD – на Δx. Из треугольника BDO

$$\sin\beta = \frac{|\mathrm{DO}|}{|\mathrm{DB}|} = \frac{l/2}{l/2+\Delta x} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta x = \frac{l(1-\sin\beta)}{2\sin\beta}. \tag{1}$$

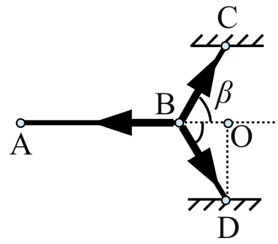

Рис. 1:

На рисунке 1 указаны силы, действующие на узел B: на резинку AB действует сила $k\Delta l$, а на *каждую* из половинок – сила $2k\Delta x$. Обратите внимание, что жёсткость половины резинки в два раза больше жёсткости целой резинки, поэтому в последней формуле для силы появилась двойка. Действительно, рассмотрев целую резинку, которая растянулась под действием некоторой силы, можно понять, что половинки этой резинки натянуты той же силой, но растянулись в два раза слабее, а значит, имеют вдвое большую жёсткость. Поэтому мы приписали кускам BC и BD жёсткость $2k$.

Спроецируем силы, действующие на узел B на направление AB и учтём, что узел B находится в равновесии:

$$k\Delta l = 4k\Delta x\cos\beta \qquad \Rightarrow \qquad \Delta l = 4\Delta x\cos\beta = 2l(1-\sin\beta)\operatorname{ctg}\beta,$$

здесь мы использовали для Δx формулу (1). Осталось лишь записать, что сдвиг точки A складывается из найдного Δl и отрезка BO, равного $|\mathrm{DO}|\operatorname{ctg}\beta = (l\operatorname{ctg}\beta)/2$, и упростить полученное выражение.

Ответ: Точку A надо сдвинуть на

$$\frac{l(5-4\sin\beta)\operatorname{ctg}\beta}{2}, \qquad \text{где } \beta = \alpha/2.$$

Задача 2.

Введём ось, направленную вправо и совпадающую с главной оптической осью линзы; начало отсчёта – центр линзы.

Пусть из-за движения поршня лампочка удалилась от фокуса линзы влево, так что расстояние от лампочки до линзы $a > F$. Тогда изображение лампочки в линзе будет действительным и будет находится правее линзы в точке с координатой $b > 0$. Величину b легко определим с помощью формулы линзы:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F} \qquad \Leftarrow \qquad b = \frac{Fa}{a-F}. \tag{2}$$

При приближении a к F знаменатель этой формулы становится малым, величина b увеличивается. При стремлении a к F изображение "уходит" вправо на бесконечность. Множество точек изображения на введённой оси в этом случае $M \in [b_1, +\infty)$, где b_1 соответствует изображению крайнего левого положения лампочки a_l, т.е. случаю, когда объём газа *минимален* (см. рис. 2).

Если же лампочка приблизится к линзе ближе, чем на F (т.е. при $a < F$), в ф-ле (2) величина b станет отрицательной. Это значит, что в данном случае изображение лампочки станет мнимым и расположится с другой стороны от линзы (левее неё) на расстоянии $|b|$ от начала отсчёта. По-прежнему приближение a к F ведёт к уходу изображения на бесконечность, правда, теперь на бесконечность влево от линзы. Множество точек изображения в этом случае $M \in (-\infty, b_2]$, где $b_2 < 0$ соответствует изображению крайнего правого положению лампочки a_r, т.е. случаю, когда объём газа *максимален*.

Итак, чтобы ответить на вопрос задачи, следует найти a_l и a_r, т.е. определить, на какое максимальное расстояние от начального положения сдвигается влево и вправо поршень в описанном процессе. Для этого найдем, в каких точках процесса $p(T)$ объём газа максимален и минимален.

Обозначим начальные давление, температуру и объёма газа через p_0, T_0, V_o соответственно, а количество вещества газа под поршнем – через ν. Пусть площадь поршня равна S.

Из уравнения Клапейрона-Менделеева объём газа $V = \nu RT/p$, т.е. пропорционален величине T/p. В любой точке X процесса значение T/p совпадает с котангенсом угла α_x линии OX, проведённой из X

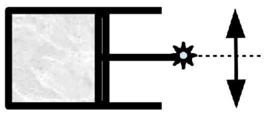

Рис. 2:

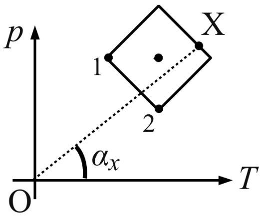

Рис. 3:

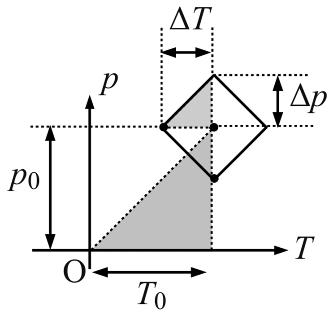

Рис. 4:

в начало координат (см. рис. 3). Понятно, что наибольший наклон (и наименьший котангенс) будет в точке 1, а наименьший наклон – в точке 2. Давление и температура в этих точках равны

$$p_1 = p_0, \qquad p_2 = p_0 - \Delta p, \qquad T_1 = T_0 - \Delta T, \qquad T_2 = T_0.$$

Здесь мы ввели величины Δp и ΔT (см. рис. 4), которые легко найти из подобия выделенных на рисунке треугольников:

$$\frac{\Delta T}{T_0} = \frac{\Delta p}{p_0} = \frac{1}{k}.$$

Найдём минимальный объём газа V_1 и его максимальный объём V_2, а также вычислим, каков в точках 1 и 2 сдвиг поршня из начального положения (ΔL_l и ΔL_r):

$$V_1 = \frac{\nu R T_1}{p_1} = \frac{\nu R T_0(1 - \Delta T/T_0)}{p_0} = V_0(1 - k^{-1}), \qquad \Delta L_l = \frac{V_0 - V_1}{S} = \frac{V_0}{Sk} = \frac{L}{k}.$$

$$V_2 = \frac{\nu R T_2}{p_2} = \frac{\nu R T_0}{p_0(1 - \Delta p/p_0)} = \frac{V_0}{1 - k^{-1}}, \qquad \Delta L_r = \frac{V_2 - V_0}{S} = \frac{V_0}{S(k-1)} = \frac{L}{k-1}.$$

Крайние положения лампочки a_l и a_r при этом будут

$$a_l = F + \Delta L_l = F + \frac{L}{k}, \qquad a_r = F - \Delta L_r = F - \frac{L}{k-1}.$$

Понятно, что лампочка не должна врезаться в линзу, т.е. $a_r > 0$, так что, должно быть, $F > \Delta L_r$.

Подставляя a_l в (2), получим b_1; подставляя туда же a_r, найдём b_2:

$$b_1 = \frac{F a_l}{a_l - F} = \frac{F(kF + L)}{L}, \qquad b_2 = \frac{F a_r}{a_l - F} = -\frac{F^2(k-1) - FL}{L}. \tag{3}$$

Ответ: $M \in (-\infty, b_2] \cup [b_1, +\infty)$, где b_1 и b_2 задаются ф-лой (3). Лампочка не разобьёт линзу только если $F(k-1) > L$, т.е. $b_2 < 0$.

Задача 3.

Когда тележку с вращающимися колёсами поставили на пол неподвижно, сила трения kMg начала действовать между колёсами и полом. Эта сила разгоняет тележку с ускорением kg, при этом скорость тележки увеличивается по закону $u(t) = kgt$. Одновременно сила трения тормозит вращающиеся колёса. Это продолжается до тех пор, пока скорость тележки и скорость её колёс не уравняются; с этого момента тележка будет катиться без проскальзывания, с постоянной скоростью.

Рассмотрим, что происходит, когда заряженные колёса тормозятся силой трения. Казалось бы, раз колёса лёгкие, т.е. практически не обладают инертностью (ведь масса цилиндров пренебрежимо мала!), сила трения может затормозить их очень быстро. Однако, это не так – в ситуацию вмешивается ЭДС индукции и правило Ленца.

Вращяющийся цилиндр с поверхностным зарядом можно рассматривать как витки с током. Эти витки создают внутри цилиндра магнитное поле индукции B, аналогично полю катушки с током. При воздействии некоторой внешней силы F, тормозящей цилиндр, скорость его вращения (величина токов) должна измениться; вместе с этим должно измениться и поле B. Однако при попытке изменить B по правилу Ленца возникает вихревое электрическое поле – появляется ЭДС индукции и соответствующая этой ЭДС напряжённость E. Возникшее электрическое поле действует на заряды цилиндра с силой QE противонаправленно внешней силе F. Значит, сила трения не сможет мгновенно затормозить даже очень лёгкие колёса. Их торможение определяется не инертностью массы колёс (которая по условию пренебрежима), а инертностью зарядов.

При решении задачи удобно воспользоваться аналогией с катушкой индуктивности и известными формулами для неё. Пусть скорость вращения обода цилиндра равна V, радиус цилиндра R. Разделим мысленно цилиндр на $N >> 1$ тонких слоёв-витков толщиной L/N. Магнитное поле в такой "катушке" $B = \mu_0 Ni/L$, где i – ток одного витка. Зная, что в одном витке сосредоточен заряд $\Delta Q = Q/N$, который совершает полный оборот за время $\Delta t = 2\pi R/V$, найдём

$$i = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{QV}{2\pi RN}, \qquad B = \frac{\mu_0 Ni}{L} = \frac{\mu_0 QV}{2\pi RL}. \tag{4}$$

Обратите внимание, что величина поля B не зависит от того, на сколько витков мы мысленно разделили цилиндр.

Поток этого магнитного поля через один виток равен $\Phi_0 = B\pi R^2$, где B задаётся ф-лой (4). Изменение Φ_0 влечёт появление ЭДС индукции в витке:

$$\mathcal{E}_0 = -\frac{\Delta\Phi_0}{\Delta t} = -\pi R^2\frac{\Delta B}{\Delta t} = -\frac{\pi R^2\mu_0 Q}{2\pi RL}\frac{\Delta V}{\Delta t} = -\frac{\pi R^2\mu_0 Qa}{2\pi RL},$$

где мы ввели $a = \Delta V/\Delta t$ – ускорение вращения обода. Знак минус показывает, что если мы тормозим цилиндр ($a < 0$), вихревое электрическое поле действует на заряды витка противонаправлено, разгоняя заряды.

Величина $\mathcal{E}_0$ имеет размерность напряжения. Так как это напряжение создаётся на одном витке длины $2\pi R$, ему соответствует напряжённость электрического поля $E = \mathcal{E}_0/(2\pi R)$. Она действуетя на заряд одного витка с силой QE/N, а на все витки – с силой

$$F_{\mathcal{E}} = Q|E| = \frac{Q|\mathcal{E}_0|}{2\pi R} = \frac{\pi R^2\mu_0 Q^2 a}{(2\pi R)^2 L} = \frac{\mu_0 Q^2 a}{4\pi L} \equiv \tilde{m}a, \quad \text{где} \quad \tilde{m} = \frac{\mu_0 Q^2}{4\pi L},$$

здесь мы ввели коэффициент $\tilde{m}$, отражающий инертность колёс тележки и имеющий размерность массы. Мы увидели, что электромагнитная индукция связанное с ней вихревое электрическое поле приводит к тому, что колесо "сопротивляется" внешней силе – также, как если бы обод колеса был массивным с массой $\tilde{m}$.

Теперь понятно, как тормозятся цилиндры. На каждый цилиндр действует сила трения $kMg/2$, значит скорость обода меняется (убывает от начального значения V_0) с ускорением $kMg/(2\tilde{m})$, т.е. по закону

$$V(t) = V_0 - \frac{kMg}{2\tilde{m}}t.$$

Скорость тележки $u(t) = kgt$ и скорость обода колеса $V(t)$ сравняются к моменту, когда

$$kgt = V_0 - \frac{kMg}{2\tilde{m}}t \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{V_0}{kg(1 + (M/2\tilde{m}))}.$$

Начиная с этого момента вращение колёс и движение тележки будет синхронизировано, проскальзывание прекратится, и тележка поедет с постоянной скоростью. Чтобы найти эту скорость, надо подставить найденное время t в $u(t)$.

Ответ: Тележка разгонится до скорости

$$V_{max} = \frac{V_0}{1 + (M/2\tilde{m})}, \text{ где } \tilde{m} = \frac{\mu_0 Q^2}{4\pi L}.$$

Задача 4.

Главная проблема при решении этой задачи – определить закон, по которому снаряд летит в полости. Для этого нужно выяснить, как суммарно притягивают снаряд все точки планеты X.

Поскольку планета не сферическая (имеет полость) удобно воспользоваться известным трюком: заменим планету с полостью системой двух сферических тел: сплошной планетой А (без полости) и телом Б отрицательной массы, имеющим форму полости. При этом тело отрицательной массы как бы наложено на сплошную планету, и положительная плотность планеты ρ во всех точках полости компенсируется отрицательной плотностью ρ, так что результирующая такой системы тел по принципц суперпозиции совпадает с гравитационным воздействием планеты X, имеющей полость.

Далее, поскольку снаряд летит как внутри тела А, так и внутри тела Б, следует разобраться, по какому закону меняется ускорение свободного падения внутри однородного массивного тела. Аналогично тому, как это делается в электростатике (см., например, решение задачи 5), легко увидеть, что если снаряд находится в любом месте сферического однородного слоя, воздействие слоя на снаряд полностью скомпенсировано. Поэтому, находясь на расстоянии x от центра тела А снаряд массой m будет "чувствовать" лишь притяжение шара радиуса x, центр которого совпадает с центром А. Сила этого притяжения описывается формулой $F_A = GmM_x/x^2$, где M_x – масса шара радиуса x с плотностью тела А. Подставляя сюда $M_x = \rho 4\pi x^2/3$, получим

$$F_A = \frac{4Gm\pi x}{3} = Kx \qquad \text{где} \qquad K = \frac{4Gm\pi}{3}.$$

Итак, мы убедились, что снаряд внутри тела А испытывает такое же воздействие от А, как если бы оно было привязано к центру А гуковской пружиной жёсткостью K, причём в недеформированном состоянии эта "пружина" имеет нулевую длину. С учётом направления векторов $\vec{x}$ и $\vec{F}_A$ можно записать $\vec{F}_A = -K\vec{x}$.

Аналогично, легко увидеть, что находясь внутри Б снаряд испытывает силу, которая отталкивает его от центра тела Б с силой $F_Б = Ky$, где y – расстояние от снаряда до тела Б. С учётом направления векторов $\vec{y}$ и $\vec{F}_Б$ можно записать $\vec{F}_Б = K\vec{y}$. Значит, суммарная сила

$$\vec{F} = \vec{F}_A + \vec{F}_Б = -K\vec{x} + K\vec{y} = K(\vec{y} - \vec{x}) = K\vec{l},$$

где $\vec{l}$ – вектор, проведённый из центра полости в центр планеты. По условию задачи $l = a + r$. Мы видим, что величина F – одна и та же, если снаряд находится одновременно внутри обоих тел А и Б.

Значит, на снаряд, летящий внутри полости действует постоянная по модулю и направлению сила F, и снаряд полетит словно в однородном поле силы тяжести с ускорением свободного падения

$$\tilde{g} = \frac{F}{m} = \frac{Kl}{m} = \frac{4G(a+r)\pi}{3}. \tag{5}$$

Направлено это ускорение вдоль CA.

Используем формулы для равноускоренного движения по параболе. Обозначим скорость вылета снаряда из точки А через V, а угол вылета α. Координаты снаряда меняются по закону

$$y(t) = Vt\sin\alpha - \frac{\tilde{g}t^2}{2}, \qquad x(t) = Vt\cos\alpha$$

В точке В снаряд должен лететь перпендукулярно стенке полости, т.е. "горизонтально" (считаем горизонталью линию, перпендукулярную $\tilde{g}$). Значит, в момент попадания снаряд находится в высшей точке траектории, пролетев по вертикали и горизонтали расстояние r. Вертикальная компонента скорости меняется по закону $V_y = V\sin\alpha - \tilde{g}t$. В момент удара T она обращается в ноль:

$$0 = V\sin\alpha - \tilde{g}T \qquad \Rightarrow \qquad T = \frac{V\sin\alpha}{\tilde{g}}.$$

Подставляя это время в (5) и приравнивая $x(T) = y(T) = r$, получим

$$x(T) = r = \frac{V^2\sin^2\alpha}{\tilde{g}} - \frac{\tilde{g}}{2}\left(\frac{V\sin\alpha}{\tilde{g}}\right)^2 = \frac{V^2\sin^2\alpha}{2\tilde{g}}, \qquad y(T) = r = \frac{V^2\sin\alpha\cos\alpha}{\tilde{g}}.$$

Разделив одно равенство на другое, получим $\operatorname{tg}\alpha = 2$. Подставляя известное значение α в любую из этих формул, несложно выразить V.

Ответ: Нужно стрелять с начальной скоростью $V = \sqrt{5r\tilde{g}/2}$, где $\tilde{g}$ определено в (5) под углом $\alpha = \operatorname{arctg} 2$ к направлению СВ.

Задача 5.

По условию задачи бусинка находится в положении равновесия под действием электростатического взаимодействия с двумя заряженными "чашками", имеющими форму куска сферы. Расположение "чашек" будем характеризовать углами $\alpha_1 = 45^\circ$ и $\alpha_2 = 60^\circ$ (см. рис. 5). Предположим для начала, что бусинка и глобус одноимённо заряжены, т.е. глобус отталкивает бусинку.

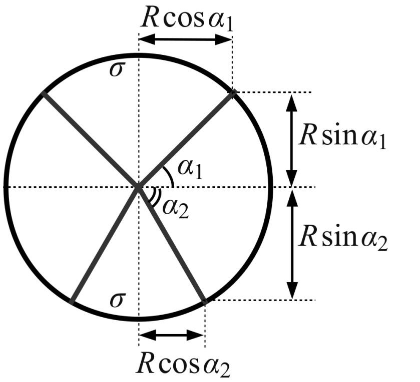

Рис. 5:

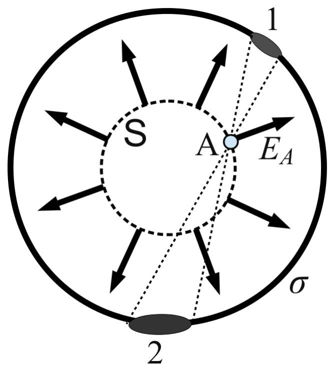

Рис. 6:

Хорошо известно, что *внутри равномерно заряженной сферы* радиуса R бусинка находилась бы в состоянии безразличного равновесия. Действительно, равномерно заряженная сферическая поверхность не создаёт напряжённость внутри себя – в любой точке! – по теореме Гаусса.

Покажем, что это так. Если бы хоть в какой-то точке A внутри равномерно заряженной сферы оказалось бы, что $E_A \neq 0$, можно было бы выделить сферическую поверхность S (см. рис. 6), такую, что электрическое поле везде на S было бы равно E_A – ведь внутри сферы нет выделенных направлений, а значит величина вектора $\vec{E}_A$ на поверхности S постоянна из симметрии. Тогда поле имело бы ненулевой поток через эту поверхность. Однако, так как поверхность S не содержит зарядов, по теореме Гаусса поток вектора напряжённости через S должен быть нулевым, что приводит нас к противоречию.

Можно посмотреть на этот факт иначе, с точки зрения сил, действующих на бусинку. Достататочно маленький заряженный участок сферы (например, 1 на рис. 6) можно рассматривать как точечный заряд, который действует на бусинку по закону Кулона. При этом существует противоположный маленький участок глобуса 2, который действует на бусинку в точности с такой же силой в другую сторону. В том, что эти силы равны, легко убедиться. Действительно, заряды рассматриваемых участков, q_1 и q_2, пропорциональны площадям этих участков, которые, в свою очередь, пропорциональны квадрату расстояния от точки A до каждого из участков: $q_1 = \varkappa a_1^2$, $q_2 = \varkappa a_2^2$. Важно, что коэффициент пропорциональности $\varkappa$ в этих формулах один и тот же, поскольку конусы, опирающиеся на площади 1 и 2 подобны по построению. Подстановка таких зарядов в закон Кулона $F_{1,2} = kqq_{1,2}/a_{1,2}^2$ приводит к требуемому равенству сил $F_1 = F_2$.

Итак, полная заряженная сфера никак не влияет на бусинку: если бы друзья Шелдона зарядили равномерно весь глобус, бусинка была бы в состоянии безразличного равновесия в любом месте горизонтальной лески. Однако в задаче часть глобуса не заряжена, поэтому в произвольной точке расположения бусинки силы от некоторых участков глобуса не скомпенсированы. Мы ищем положение равновесия в такой системе, т.е. точку расположения бусинки, где силы её отталкивания от всех участков глобуса скомпенсированы. Очевидно, это должна быть точка, в которой с противоположной стороны от бусинки находятся или одновременно заряженные куски глобуса (они компенсируют друг друга), или одновременно незаряженные куски. Такая точка внутри глобуса одна (см. точку B на рис. 7), из неё обе заряженные "чашки" видны под одинаковым углом β, который легко найти из геометрических соображений.

Для этого введём h_1 и h_2, а также угол β как показано на рис 7, и заметим, что с одной стороны $h_1 + h_2 = R\sin\alpha_1 + R\sin\alpha_2$ (ср. с рис. 5), а с другой стороны, из треугольника BNK $h_1 = R\cos\alpha_1 \operatorname{ctg}\beta$, из треугольника BN′K′ $h_2 = R\cos\alpha_2 \operatorname{ctg}\beta$, поэтому

$$h_1 + h_2 = R\sin\alpha_1 + R\sin\alpha_2 = R\cos\alpha_1 \operatorname{ctg}\beta + R\cos\alpha_2 \operatorname{ctg}\beta \quad \Rightarrow \quad \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2}{\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}.$$

Отсюда равновесное положение бусинки – на расстоянии h_2 от края южной "чашки", где

$$h_2 = |\mathrm{N'K'}| \operatorname{ctg}\beta = R\cos\alpha_2 \operatorname{ctg}\beta = \frac{R(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{2(\sqrt{2}+1)}. \tag{6}$$

Подчеркнём, что факт компенсации сил от противоположных заряженных участков сферы уже доказан на основе теоремы Гаусса и принципа суперпозиции, так как эта компенсация имеет место для заряженных участков полной сферы.

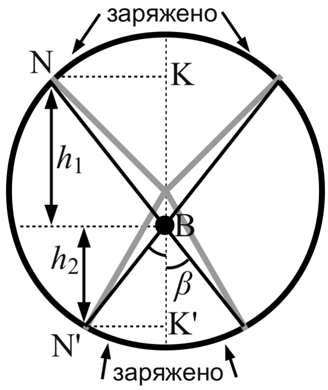

Рис. 7:

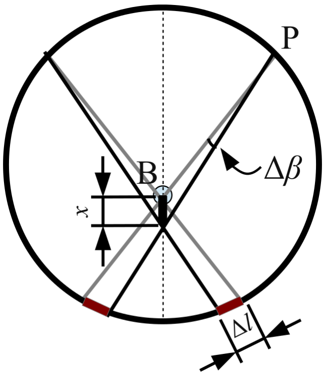

Рис. 8:

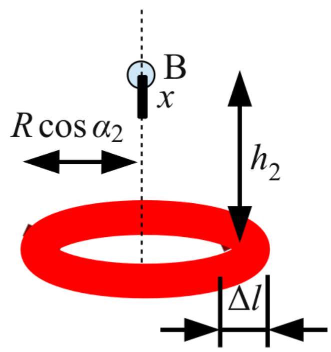

Рис. 9:

Рассмотрим, что происходит при сдвиге бусинки из положения равновесия. Во-первых, малые колебания вокруг этого положения возможны только если бусинка и глобус заряжены одноимённо. В противном случае положение равновесия бусинки оказалось бы неустойчивым, и она при дальнейшем движении просто притянулась бы к ближайшему заряженному участку глобуса.

При малом сдвиге x бусинки в сторону южного полюса бо́льшая часть участков заряженных "чашек" по-прежнему компенсируют друг друга. Нескомпенсированными останутся лишь куски, отмеченные красным на рис. 8, расположенные по кольцевому краю южной чашки. Обозначим ширину этого кольца Δl; введём также $\Delta\alpha$ – угол, под которым Δl виден из центра окружности. Очевидно из геометрических соображений (см. рис. 8)

$$\Delta l = R\Delta\alpha = 2R\Delta\beta, \qquad \text{где} \qquad \Delta\beta = \frac{x\sin\beta}{|\mathrm{BP}|} = \frac{x\sin\beta}{R\cos\alpha_1/\sin\beta} = \frac{x\sin^2\beta}{R\cos\alpha_1}.$$

Здесь мы использовали, что углы $\Delta\alpha$ и $\Delta\beta$ опираются на одну и ту же дугу; при вычислении угла $\Delta\beta$ мы спроецировали x на направление, перпендикулярное BP, и воспользовались малостью углов ($\Delta\beta \sim \operatorname{tg}\Delta\beta$). Поскольку x мало (колебания по условию малые), силу от такого заряженного кольца можно вычислить, считая кольцо тонким (одномерным) и вводя плотность заряда единицы длины кольца по формуле

$$\lambda = \sigma\Delta l = \frac{2x\sigma\sin^2\beta}{\cos\alpha_1}.$$

Итак сила, возвращающая бусинку в равновесную точку равна силе, с которой кольцо радиуса $R\cos\alpha_2$ с плотностью зарада на единицу длины λ действует на бусинку, находящуюся на расстоянии h_2 от центра кольца (см. рис. 9). Длина окружности кольца равна $2\pi R\cos\alpha_2$; все участки этого кольца находятся на расстоянии $h_2/\cos\beta$ от бусинки и тянут её под углом β к леске. Поэтому в проекции на направление лески

$$F = \frac{kq\lambda 2\pi R\cos\alpha_2}{(h_2/\cos\beta)^2}\cos\beta.$$

Подставляя сюда $h_2 = R\cos\alpha_2 \operatorname{ctg}\beta$ и выражение для λ, получим

$$F(x) = Kx \qquad \text{где} \quad K = \frac{4\pi kq\sigma\cos\beta\sin^4\beta}{R\cos\alpha_1\cos\alpha_2}. \tag{7}$$

Видно, что возвращающая сила пропорциональна отклонению из положения равновесия. Такому движению соответствуют гармонические колебания с периодом, не зависящим от амплитуды колебаний и равным $T = 2\pi\sqrt{m/K}$.

Ответ: Бусинка расположится в равновесии на расстоянии h_2 от края южной заряженной "чашки" (см. рис. 7), где h_2 задаётся формулой (6). Период колебаний около положения равновесия $T = 2\pi\sqrt{m/K}$, где

$$K = \frac{4\pi kq\sigma\cos\beta\sin^4\beta}{R\cos\alpha_1\cos\alpha_2}, \qquad \alpha_1 = 45^\circ, \qquad \alpha_2 = 60^\circ. \qquad \beta = \operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}.$$