Теоретический тур (9 класс)

Задача 1
Уравнение Ньютона на верхний шарик 2 б
Уравнение Ньютона на следующий шарик 2 б
Уравнение движения вдоль первой пружинки 2 б
Уравнение движения вдоль следующей пружинки 2 б
Ответ 2 б
Итого: Полностью решенная задача 10 баллов

Задача 2
Уравнение Ньютона для тележки 2 б
Уравнение Ньютона для груза вдоль спицы 2 б
Уравнение Ньютона для тележки вдоль рельсов 2 б
Связь ускорения тележки и груза 2б
Ответ 2 б

Задача 3
Правильно перерисована схема 3 б
Сопротивление стороны треугольник - 1 б
Сопротивление одной трети окружности - 1 б
Найдено общее сопротивление - 3 б
Ответ 2 б
Полностью решенная задача оценивается в 10 баллов

Задача 4
Написано уравнение давления в жидкости 1 б
Найдена высота давления в жидкости, равного атмосферному давлению 5 б
Ответ, в зависимости от точности: 15% погрешности - 1 б
10% погрешности - 2 б
5% погрешности - 3 б
Задача, решенная с точностью 5% - 10 баллов

Задача 5
Закон сохранения импульса 2 б
Скорость космонавта поле выстрела 2 б
Возможные направления (круг) 2 б
Минимальное время 2 б
Максимальное время 2 б
Полностью решенная задача - 10 баллов

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР 2015. 9 класс.

Задача 1.

Будем нумеровать шарики сверху вниз. Рассмотрим два шарика сверху. На первый (крайний верхний) шарик действуют три силы: сила тяжести F_{mg}, сила Архимеда F_A и сила упругости пружины $F = k\Delta x_1$. На второй сверху шарик действуют сила упругости первой пружины $F = k\Delta x_1$, силы Архимеда, сила тяжести и сила упругости второй пружины $F = k\Delta x_2$. Следовательно, в состоянии равновесия, для первого шарика верно:

$$F_A - mg = k\Delta x_1.$$

Для второго шарика выполняется следующее равенство:

$$F_A + k\Delta x_1 = mg + k\Delta x_2,$$

откуда легко получить следующее соотношение: $\Delta x_2 = 2\Delta x_1$. Значит, начальная скорость должна быть такой, чтобы за вторую секунду камень пролетал бы в два раза большее расстояние, нежели за первую:

$$\Delta x_1 = v_0 t + \frac{gt^2}{2},$$

$$\Delta x_2 = (v_0 + gt)t + \frac{gt^2}{2}.$$

Применяя соотношение $\Delta x_2 = 2\Delta x_1$, получим следующее:

$$2(v_0 t + \frac{gt^2}{2}) = (v_0 + gt)t + \frac{gt^2}{2}$$

$$2v_0 t + gt^2 = v_0 t + \frac{3}{2}gt^2$$

Откуда легко получить ответ:

$$v_0 = \frac{1}{2}gt = 4,9\text{м/с}.$$

Докажем, что это верно для расстояния между n-м и (n+1)-м шариком. Уравнение Ньютона для n-го шарика:

$$k\Delta x_{n-1} + F_A = mg + k\Delta x_n,$$

откуда $x_n = \frac{F_A - mg}{k} + \Delta x_{n-1}$, т.е. $x_n = nx_1$. С точки зрения пролетающего камня, расстояние между n-м и (n+1)-м шариками он пролетает за время $t = 1$ сек. При этом начальная скорость камня, подлетающего к n-му шарику, $v = v_0 + g(n-1)t$.

$$\Delta x_n = (v_0 + g(n-1)t)t + \frac{gt^2}{2}.$$

Таким образом, приравнивая nx_1 и x_n, получим:

$$n(v_0 t + \frac{gt^2}{2}) = v_0 t + g(n-1)t^2 + \frac{gt^2}{2}$$

$$(n-1)v_0 t = \frac{gt^2}{2}(n-1)$$

Откуда получаем Ответ: $v_0 = \frac{1}{2}gt$.

Задача 2.

Система симметрична, поэтому можно рассматривать только половину: одну бусинку и одну тележку. Ускорение тележки по горизонтали такое же, как и ускорение бусинки вдоль спицы — иначе нить либо порвется, либо будет растягиваться, обозначим его за a. В силу симметрии задачи, ускорение, с которым сдвигаются тележки, будет удвоенным ускорением тележки: $2a$.

Рассмотрим силы, действующие на бусинку вдоль спицы: это силы натяжения нити T и проекция силы тяжести бусинки $mg\sin\alpha$. Также, бусинка движется в горизонтальном направлении с ускорением a, так как спица жестко закреплена с мачтой и тележкой, что означает, что система является неинерциальной, проекция горизонтального ускорения вдоль спицы : $a\cos\alpha$. Таким образом, закон Ньютона вдоль спицы для бусины массой m будет выглядеть следующим образом:

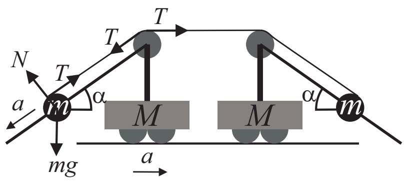


Рис. 1:

$$ma = mg\sin\alpha - T + ma\cos\alpha.$$

Запишем уравнение Ньютона для бусины на ось, перпендикулярную спице. Бусинка не движется перпендикулярно спице, значит ускорение бусины вдоль этой оси — 0, на бусину действует сила реакции опоры N и проекция силы тяжести $mg\cos\alpha$. Также, проекция горизонтального ускорения a системы на ось, перпендикулярную спице, равно $a\sin\alpha$:

$$0 = N + ma\sin\alpha - mg\cos\alpha.$$

Теперь рассмотри силы, действующие на тележку массой M вдоль горизонтальной оси. Это сила натяжения нити T, проекция силы натяжения нити $T\cos\alpha$ и сила проекция силы реакции опоры бусинки $N\sin\alpha$:

$$Ma = T - T\cos\alpha + N\sin\alpha.$$

Решая систему уравнений, получим:

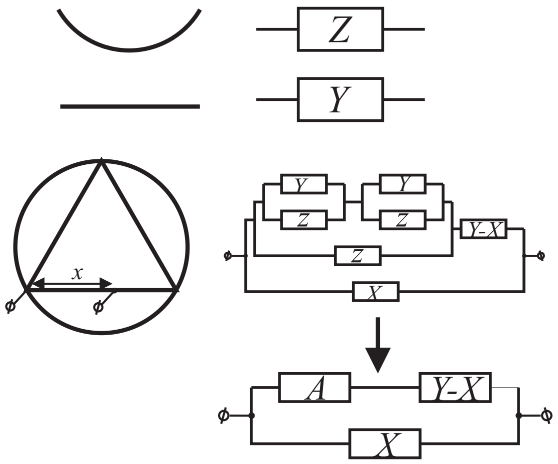
$$a = \frac{mg\sin\alpha}{M + 2m(1-\cos\alpha)}.$$

Ответ:

$$a_{\text{сближения}} = \frac{2mg\sin\alpha}{M + 2m(1-\cos\alpha)}$$

Задача 3.

Обозначим сопротивление трети окружности через Z, сопротивление стороны треугольника через Y, сопротивление части x через X. Тогда общее сопротивление схемы будет выглядеть так, как показано на рисунке:



Обозначим сопротивление круга и двух сторон треугольника через A. Тогда общее сопротивление схемы можно записать следующим образом:

$$R_{\text{общ}} = \frac{(A+Y-X)X}{A+Y+X-X} = \frac{-X^2 + X(A+Y)}{A+Y}.$$

Знаменатель $R_{\text{общ}}$ является константой, не зависящей от X, тогда как числитель представляет собой параболу ветвями вниз. Вершина данной параболы (т.е. максимально возможное сопротивление) находится в точке $X = -\frac{b}{2a} = \frac{A+Y}{2}$. Рассмотрим сопротивления Y и Z. Сопротивление Z пропорционально одной трети длины окружности, т.е. $Z = \rho\frac{2\pi R}{3}$, где ρ — сопротивление единицы длины проволоки, R — радиус окружности. Сопротивление Y стороны треугольника можно выразить следующим образом: $Y = \rho\sqrt{3}R$. Рассмотрим сопротивление A:

$$A = \frac{Z(2\frac{YZ}{Y+Z})}{Z + 2\frac{YZ}{Y+Z}} = \frac{2YZ^2}{3YZ + Z^2}.$$

Выразим искомую длину x как сопротивление X, деленное на удельное сопротивление ρ: $x = X/\rho$. Введем величины z, y и α также: $y = Y/\rho$, $z = Z/\rho$ и $\alpha = A/\rho$. Тогда выражение для длины x будет записываться аналогичным образом: $x = \frac{\alpha+y}{2}$:

$$x = \frac{1}{2}(\alpha + y) = \frac{1}{2}\frac{2yz^2 + 3y^2z + yz^2}{3yz + z^2} = \frac{1}{2}\frac{3y(y+z)}{(3y+z)}.$$

Подставим значения y и z:

$$x = \frac{1}{2}\frac{3\sqrt{3}R(\sqrt{3}R + \frac{2\pi R}{3})}{3\sqrt{3}R + \frac{2\pi R}{3}} = \frac{3\sqrt{3}R}{2}\frac{3\sqrt{3}+2\pi}{9\sqrt{3}+2\pi} = R\frac{27+6\sqrt{3}\pi}{18\sqrt{3}+4\pi} \approx 1.4R$$

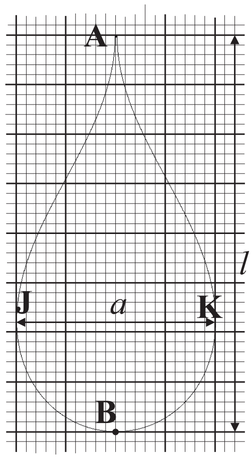
Таким образом, <u>Ответ</u>: $x = R\frac{27+6\sqrt{3}\pi}{18\sqrt{3}+4\pi} \approx 1.4R$

Задача 4.

Всю задачу можно решать как двумерную: краевыми эффектами на концах трубы пренебрежем из интуитивный соображений (труба очень длинная, происходящее на концах не сильно скажется на середине трубы); тогда все сечения, достаточно далекие от концов, практически одинаковы, а значит оболочку в интересующей нас области можно считать цилиндрической, то есть ее можно представить образуемой множеством прямых, перпендикулярных рисунку, проходящих через кривую, изображающую оболочку на рисунке. Отсюда ясно, что силы натяжения оболочки, направленные не в плоскости рисунка, никак не стремятся сдвинуть оболочку в плоскости рисунка. Интересны только силы в плоскости рисунка. Рассматривая кусок трубы размером D "вглубь рисунка", мысленно вырезанный двумя плоскостями, параллельными рисунку, что мы и будем всегда иметь в виду дальше в решении; можем думать об оболочке, как об идеальной нити, а о задаче как о двумерной.

Оболочка везде имеет одинаковое натяжение. Почему? В направлении вдоль оболочки (по касательной к ней) никаких сил, кроме сил натяжения самой оболочки, нет. (Сила тяжести самой оболочки пренебрежимо мала, поскольку оболочка легкая, а сила давления жидкости перпендикулярна оболочке). Если бы натяжение вдоль оболочки не было везде одинаковым, то на какой-то конкретный небольшой участок оболочки действовали на концы разные силы натяжения, суммарная сила была бы ненулевой, а поскольку оболочка легкая (безмассовая), то это бы стало причиной бесконечно большого ускорения вдоль себя, а бесконечного ускорения нет, оно вообще нулевое.

Найдем силу натяжения оболочки T (она, конечно, одинакова на единицу длины трубы, перпендикулярной плоскости рисунка). Всё висит на двух листках оболочки, примыкающих слева и справа к стержню, на который всё подвешено (вверху картинки). Из условия известно, что оболочка там вертикальна, а значит и сила натяжения оболочки направлена там вертикально, следовательно $2T$ =вес воды в оболочке в куске трубы (силой давления воды на стержень снизу мы пренебрегли, поскольку стержени очень узкий). Поскольку объем нашего куска будет равен площади его сечения S, умноженной на D, а масса m — произведению объема и плотности, вес же равен mg, то $2T = g\rho DS$.



Разделим (мысленно) объем оболочки горизонтальной плоскостью там, где стенки оболочки висят вертикально (на рисунке это отрезок JK, обозначим его длину через a). Весь криволинейный кусок JBK висит на двух стенках оболочки J и K. Это значит, что две силы натяжения оболочки (по T каждая) уравновешивают все силы, действующие на JBK вниз, а именно вес всей воды в фигуре JBK плюс давление воды сверху на плоскость, изображаемую отрезком JK. Вес жидкости (W_{JBK}) внутри JBK рассчитаем аналогично весу всего JBK: $W_{JBK} = g\rho DS_{JBK}$, а давление на глубине точки J везде одинаково, поэтому сила давления равна произведению этого давления и площади — Dap_J, поэтому записываем условие равновесия так: $2T = g\rho DS_{JBK} + Dap_J$.

Подставим в это уравнение $2T$: $g\rho DS = g\rho DS_{JBK} + Dap_J$. Теперь выразим p_J: $p_J = (S - S_{JBK})g\rho/a$. Теперь осталось добавить к этому давлению гидростатическое давление (за счет разности глубины B и J) и атмосферное давление p_0, поскольку мы его пока "принимали за ноль отсчета давлений"(т.е. на самом деле не учли то, что оно действует снизу на JBK. Тем самым, мы должны были бы добавить его уже в правую часть формулы для p_J).

Получаем ответ: $p_B = \rho g(\frac{S-S_{JBK}}{a} + (h_B - h_J)) + p_0$.

Учитывая, что 40клеток $= |AB| = l$, то $h_B - h_J = 11$клеток $= 0.275l$, $a = 20$клеток $= 0.5l$. Также, по клеточкам: $S - S_{JBK} = S_{JK} = 296$кв.клеток $= 0,185l^2$.

Окончательно получим ответ: $p_B = \rho g(0,185/0,5 + 0,275)lp_0 = 0,645\rho gl + p_0$.

Задача 5.

В результате каждого выстрела пуля приобретает импульс mV. Такой же импульс приобретёт космонавт в результате отдачи от выстрела. Значит, вектор скорости космонавта после выстрела меняется на величину $u = mV/M$. По условию задачи в точке С космонавт должен иметь нулевую скорость. Этого можно было бы достичь двумя выстралами, направленными в противоположные стороны, однако при этом первый выстрел должен был бы быть произведен в сторону точки О, в станцию, что по условию невозможно.

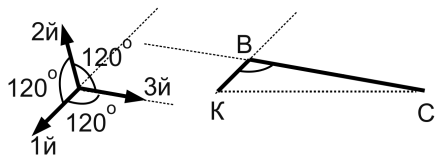


Рис. 2:

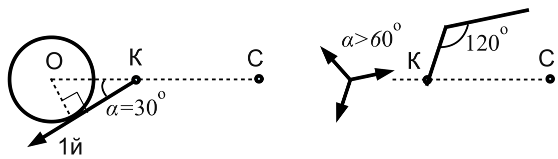


Рис. 3:

Значит, необходимо использовать три выстрела, причем суммарный импульс, приобретенный космонавтом от них должен быть равен нулю. Это возможно только если угол между направлением любых двух выстрелов равен 120^o (см., например, рис. 2, слева). Между выстрелами космонавт будет двигаться по прямолинейным отрезкам КВ и ВС, а угол $\angle KBC$ между этими отрезками также будет 120^o (см. рис. 2, справа). Обратите внимание, что после второго выстрела космонавт полетит не противоположно второму выстрелу, а в направлении, противоположному направлению *треьего* выстрела, так как импульсы от первых двух выстрелов сложатся.

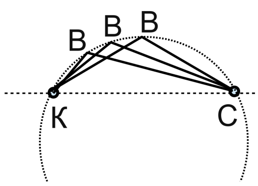


Рис. 4:

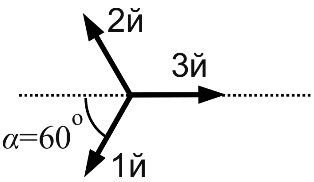


Рис. 5:

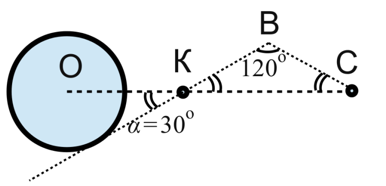


Рис. 6:

Понятно, что первый выстрел должен быть направлен к ОК под углом α не менее 30^o, иначе космонавт выстрелит в станцию (выстрел $\alpha = 30^o$ соответствует ситуации, когда космонавт стреляет по касательной к борту). С другой стороны, не имеет смысла стрелять под углом больше 60^o: иначе космонавт пролетит мимо точки С, см. рис. 3.

Легко понять, что у всех треугольников, построенных на КС с углом $\angle KBC = 120^o$, вершина В будет лежать на одной окружности (см. рис. 4). Все такие треугольники дают возможную траекторию космонавта.

Самый быстрый способ добраться до точки С – двигаться по траектории, минимально удаляющейся от прямой КС. Для этого необходимо сделать в первый же момент два выстрела как на рис. 5 (причем одновременно), и приобрести скорость прямо к С; третьим же выстрелом в С космонавт остановится. Время движения при этом будет минимально и составит $nR/u = nMR/mV$. Треугольник KBC при этом вырождается в отрезок КС (К совпадает с В). Разумеется, стрелять одновременно в двух направлениях невозможно, однако, уменьшая промежуток времени между первыми двумя выстрелами, космонавт сможет выбирать траекторию, в которой точка В сдвигается по окружности влево, уменьшая время движения в пределе вплоть до nMR/mV.

Наоборот, максимальное время соответствует треугольнику, в котором точка В максимально отклоняется от КС, т.е. равнобедренному треугольнику KBC (при KB=BC, $\alpha = 30^o$, см. рис. 6). В этом случае путь космонавта равен $nR/\cos 30^o$, а время движения $nR/u\cos 30^o = 2nMR/mV\sqrt{3}$. Ответ: Первый выстрел необходимо произвести под углом α к направлению КО, лежащим в промежутке от 30 до 60 градусов. Направление второго выстрелв должно составлять с первым угол 120^o, отложенным в направлении КО. Направление третьего выстрела должно составлять угол 120^o в первым и вторым.

Минимальное время движения космонавта $t_{min} = nMR/mV$, максимальное $t_{max} = 2nMR/\sqrt{3}mV$.