Городской тур 2014. 8 класс.

Задача 1.

Рассмотрим внимательно те пять секунд, за которые Роман высовывает воронку под дождь. Заметим: для каждого момента времени τ есть симметричный ему момент $5-\tau$; если в момент τ под дождём находилась некоторая часть воронки — то в момент $5-\tau$ ровно такая же (симметричная) часть воронки НЕ находится под дождём. Из этого следует, что суммарная площадь воронки под дождём в моменты τ и $5-\tau$ как раз равняется полной площади воронки, а значит, пять секунд вытаскивания воронки под дождь эквивалентны двум с половиной секундам держания воронки под дождём целиком.

Таким образом, весь процесс эквивалентен тому, что Роман просто держал воронку под дождём на протяжении $t = 15$ сек.

Поймём, как связаны величины из условия задачи. За время t в воронку попадут все капли, которые находились ровно над воронкой и на высоте не более ut, где u - данная в условии задачи скорость капли. Таким образом, за время t в воронку попадут все капли из объёма воздуха l^2ut. Обозначая за n искомое количество капель в 1 м^3 воздуха, запишем уравнение на количество капель в воронке:

$$nl^2ut = \frac{V}{v}$$

Переводя V и v в одну систему единиц, получаем, что V/v - количество капель в воронке Романа - равняется 200.

Отсюда

$$n = \frac{200}{l^2ut} = \frac{200}{0.25\cdot 12\cdot 15} = \frac{200}{45} \approx 4.5 \text{ шт/м}^3$$

Осталось определить, какое количество осадков в миллиметрах выпадет, если такой дождь будет равномерно идти целые сутки. За $t = 15$ сек высота водяного столба оказалась равна

$$h = \frac{V}{l^2} = \frac{10 \text{ см}^3}{0.25 \text{ м}^2} = \frac{10^{-2} \text{ м}^2\text{мм}}{0.25 \text{ м}^2} = 4\cdot 10^{-2} \text{ мм}$$

В сутках 86400 секунд, а значит итоговое количество осадков будет равняться $\frac{86400}{15}h = 230$ мм

<u>Ответ:</u> В одном кубическом метре воздуха находится примерно 4.5 капли; если такой дождь будет идти целые сутки равномерно, выпадет 230 мм осадков.

Задача 2.

Чтобы вскипятить чайник, нужно передать ему количество теплоты, достаточное для нагревания воды до температуры кипения. Это количество от местонахождения не зависит, а значит, время закипания будет зависеть от мощности нагревательного элемента.

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{Q/W_1}{Q/W_2} = \frac{W_2}{W_1} = \frac{U_2I_2}{U_1I_1}$$

Нагревательный элемент имеет постоянное сопротивление, и для него справедлив закон Ома: $I = U/R$. В солнечной Калифорнии напряжение в электрической сети в два раза ниже, чем в Петербурге, следовательно и ток на нагревательном элементе будет меньше в два раза.

$$U_2/U_1 = I_2/I_1 = 2$$

Таким образом, мощность нагревательного элемента чайника в Калифорнии будет в четыре раза меньше, откуда следует, что и чайник будет закипать в четыре раза дольше, т.е. 12 минут.

Учтём теплопотери. Заметим: отношение мощностей от теплопотерь не зависит. Продемонстрируем, что теплопотери в Калифорнии будут больше. Действительно, чайник там будет закипать дольше, и в частности при каждой конкретной температуре чайник будет находиться бо́льшее время. Таким образом, с учётом теплопотерь чайнику в Калифорнии нужно передать бо́льшее количество теплоты, чем в Петербурге. Это, конечно, лишь увеличит ответ.

<u>Ответ:</u> Чайник в Калифорнии закипит за 12 минут; учёт теплопотерь увеличивает ответ.

Задача 3.

Заметим: объёмы круга на поверхности и на глубине h пропорциональны друг другу: если мы увеличим начальный объём круга в два раза, то в два раза увеличится и его объём на глубине h. В этом легко убедиться, отметив, что объём, занимаемый газом при заданных давлении и температуре, прямо пропорционален количеству этого газа (или его массе). Заметим также, что подъёмная сила круга с воздухом прямо пропорциональна его объёму. Таким образом, подъёмная сила круга с воздухом на глубине h прямо пропорциональна его объёму на поверхности.

Заметим также, что с глубиной подъёмная сила круга с воздухом падает ввиду сжатия воздуха внутри, то есть условие „свободное погружение аппарата начинается с глубины h =10 м" означает, что на этой глубине силы тяжести и Архимеда, действующие на систему „аппарат + жилет", равны друг другу, и аппарат может свободно плавать.

Определим, на сколько нужно изменить подъёмную силу, чтобы скомпенсировать вес дополнительной камеры.

Обозначим ускорение свободного падения за g. Суммарная сила, действующая на погружённый зонд со стороны силы притяжения и силы Архимеда, будет равняться

$$F = mg - \rho V g = (125 - 1190 \cdot 0.1)\ \text{кг} \cdot g = 6\ \text{кг} \cdot g$$

Можем заключить, что „эффективная масса" зонда (сила тяжести за вычетом силы Архимеда) равняется 6 кг. Таким образом, на глубине h круг с воздухом должен создавать подъёмную силу, равную $6g$. После добавления новой камеры сила Архимеда, действующая на зонд, не изменилась, в то время как его сила тяжести возросла на $3g$. Таким образом, его эффективная масса стала теперь $9g$, т.е. увеличилась в полтора раза. А значит, как мы заключили в первом абзаце, и начальный объём круга с воздухом также необходимо увеличить в полтора раза.

<u>Ответ:</u> Начальный объём круга с воздухом необходимо увеличить в полтора раза.

Задача 4.

Разделим график условно на три части: от начального момента до $t = 6$ часов, от $t = 6$ до $t = 8$ часов и от 8 часов и далее. Заметим, что 1000 кг/м^3 = 1 кг/л.

От 8 часов и далее масса варева не изменяется и равняется 3,6 кг. От $t = 6$ до $t = 8$ часов объём варева остаётся постоянным, изменяется только плотность. Легко понять, что график массы от времени будет линейным. В момент времени $t = 6$ масса равняется $1{,}6 \cdot 2 = 3{,}2$ кг.

Для того, чтобы построить график в первой части, запишем явно зависимости плотности и объёма зелья от времени на интервале от $t = 0$ до $t = 6$ часов. Обе зависимости, как видно из их графиков, являются линейными функциями, и по двум крайним точкам можно найти их выражения:

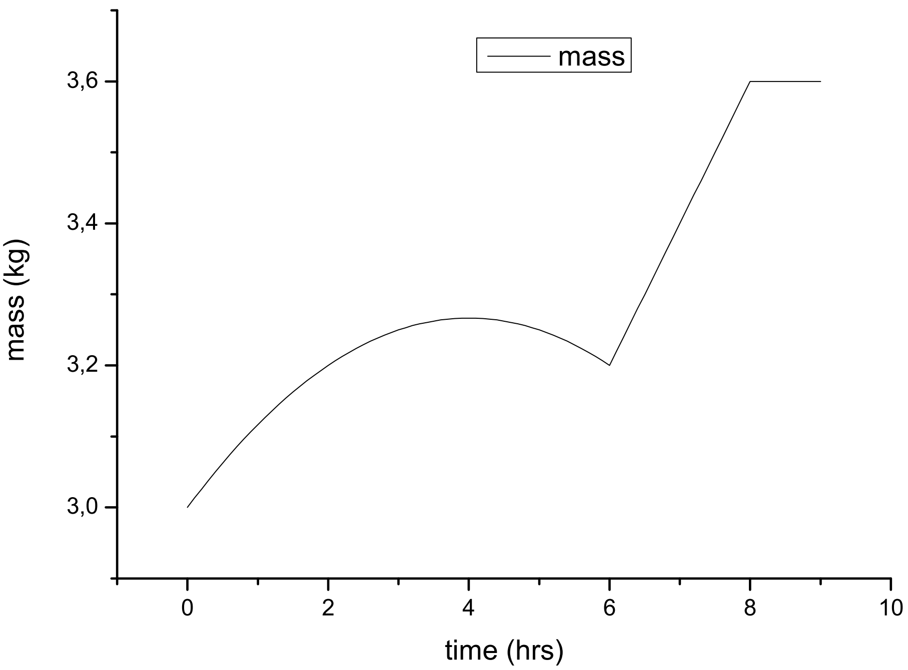
$$V(t) = 3 - \frac{1}{6}t\ \text{л}$$
$$\rho(t) = 1 + 0{,}1t\ \text{кг/л}$$

Масса в любой момент времени - произведение объёма и плотности, поэтому зависимость массы от времени будет

$$m(t) = (3 - \frac{1}{6}t) \cdot (1 + 0{,}1t) = -\frac{t^2}{60} + \frac{2t}{15} + 3$$

Таким образом видим, что график зависимости массы зелья от времени представляет собой часть параболы, и максимум её расположен в точке -b/2a, т.е. $t = 4$ часа. Осталось лишь построить итоговый сводный график.

<u>Ответ:</u> см. рисунок.



Задача 5.

Опишем происходящий процесс: кастрюлю греют снизу, в результате чего лёд постепенно тает. По мере таяния льда образующаяся вода заполняет пустоты внутри ледяной крошки. Чем больше растаяло льда, тем больше появилось воды, и тем больше часть кастрюли, заполненная ею. Одновременно с этим давление воды на уровне дна кастрюли растёт. В некоторый момент давление воды на дне кастрюли оказывается равно максимальному для системы значению - и тогда оставшийся лёд всплывает, а искомое значение меняться перестаёт.

Определим массу льда.

$$m = \rho S h = 4 \cdot 10^{-2} \cdot 0{,}5 \cdot 600 = 12 \text{ кг}$$

Отсюда сразу можно сказать, что конечное давление жидкости на уровне дна кастрюли будет равняться

$$P = \frac{mg}{S} = 3 \text{ кПа}$$

В частности, как только давление жидкости на уровне дна сосуда окажется равным 3000 Па, лёд всплывёт.

Из соотношения $\rho/\rho_{\text{Л}} = 2/3$ плотностей ледяной крошки и льда видно, что лёд занимает две трети объёма кастрюли. Таким образом, треть объёма кастрюли - пустоты, которые и будет заполнять вода. Эффективная площадь кастрюли для воды равняется $S_{\text{эфф}} = S/3$.

Для того, чтобы создать давление P, нужен столб жидкости высотой h': $P = \rho_{\text{В}} g h'$. Отсюда необходимый для этого объём растаявшей жидкости равен $V = h'S/3$, и масса её равна

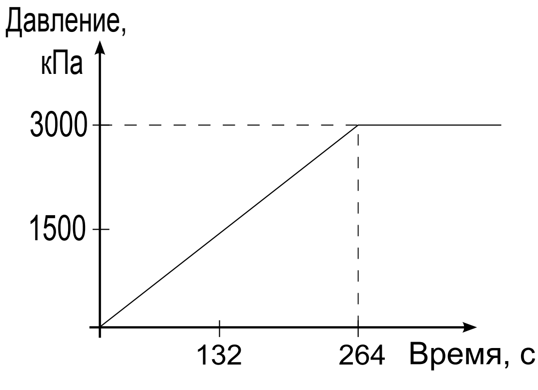
$$M = \rho_{\text{В}} V = \rho_{\text{В}} h' S/3 = \frac{\rho_{\text{В}} SP}{3\rho_{\text{В}} g} = \frac{SP}{3g} = \frac{0{,}04 \cdot 3000}{30} = 4 \text{ кг}$$

За одну секунду будет плавиться

$$\mu = \frac{W \cdot 1c}{\lambda} = \frac{5}{330} = \frac{1}{66} \text{ кг льда.}$$

Тогда 4 кг растает за 264 секунды, и за это же время давление жидкости на уровне дна сосуда вырастет с нуля до 3000 Па. После этого лёд всплывёт, и искомое давление меняться перестанет.

Осталось лишь отобразить полученное выше на графике



Ответ: см. рисунок.

Задача 6.

Определим сжатия пружин. На нижнюю рамку действует сила тяжести самой рамки, вес грузика и сила упругости со стороны пружины. Амортизатор находится в равновесии, следовательно силы скомпенсированы. Отсюда

$$k_3 l_3 = Mg + mg$$

$$l_3 = \frac{Mg + mg}{k_3} = \frac{85}{200} = 42{,}5 \text{ см}$$

На вторую рамку действует сила упругости первой пружины, вес рамки и сила упругости второй пружины. Учитывая, что сила упругости первой пружины равна $Mg + mg$, вновь запишем:

$$k_2 l_2 = Mg + 2mg$$

$$l_2 = \frac{Mg + 2mg}{k_2} = \frac{95}{100} = 95 \text{ см}$$

Видим, что вторая пружина должна сжаться на 95 сантиметров при длине в 50 сантиметров. Это означает, что вторая пружина просто сжата целиком, т.е.

$$l_2 = 50 \text{ см}$$

Из аналогичных соображений найдём l_1:

$$l_1 = \frac{Mg + 3mg}{k_1} = \frac{105}{300} = 35 \text{ см}$$

Пользуясь изображением амортизатора, легко понять, что его длина будет равняться

$$L = l_1 + l_2 + l_3 + l_4 = 177{,}5 \text{ см}$$

Ответ: Длина амортизатора равняется 177,5 см.

Задача 7.

Во время проведения олимпиады условие было уточнено: считать, что прибор начинает считать детали одновременно с выпуском новой детали, в том числе считает её. Приведём решение в соответствии с данным уточнением.

Опишем сначала график качественно. Если скорость прибора равна скорости ленты, он посчитает одну-единственную начальную деталь. Скорость прибора больше скорости ленты: прибор „догоняет“ предыдущие детали. При некоторой скорости он сумеет догнать следующую деталь ещё на ленте, и посчитает уже две детали. При некоторой ещё большей скорости - три и так далее. Однако прибор в любом случае может посчитать лишь те детали, которые изначально лежали на ленте. Поэтому по достижении некоторой скорости прибор просто будет считать все детали, которые лежали на ленте в начальный момент, и дальшейшее увеличение его скорости не даст эффекта. Скорость прибора меньше скорости ленты: здесь наоборот, детали догоняют прибор. Чем меньше скорость ленты, тем за большее время он преодолевает ленту, и тем большее количество деталей успеет его обогнать. Таким образом, при стремлении скорости прибора к нулю количество проверенных деталей будет стремиться к бесконечности.

Напишем теперь явные выражения.

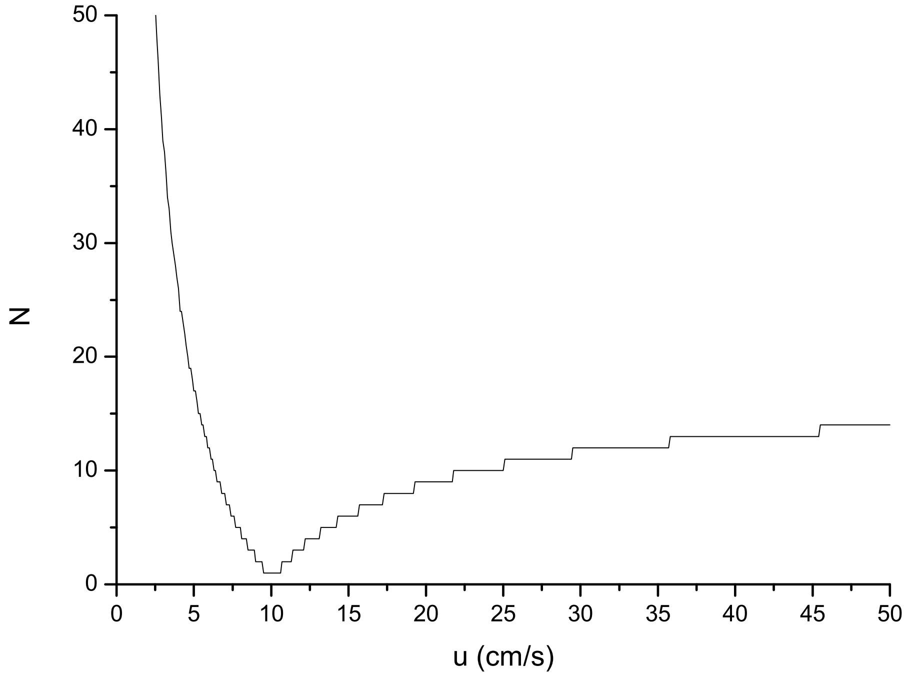
Расстояние между соседними деталями равняется $l = 30$ см; время, которое прибор затрачивает на прохождение всей ленты, равняется $T = 500\text{см}/u$.

Скорость сближения прибора и деталей равняется $|u - 10\text{см/с}|$, т.е. прибор будет проверять деталь каждые $\tau = \frac{l}{|u-10\text{см/с}|}$ секунд. Тогда прибор успеет посчитать

$$N = 1 + \left\lfloor \frac{T}{\tau} \right\rfloor = 1 + \left\lfloor \frac{500|u-10|}{ul} \right\rfloor$$

Пользуясь качественным описанием и явным выражением для количества деталей, построим итоговый график:

Ответ: см. рис.



50
40
30
20
10
0
N
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
u (cm/s)

Городской тур 2014. 8 класс. Разбалловка

Все задачи довыводной части (1-4 задачи) оцениваются из 3 баллов, все задачи выводной (5-7) - по 6 баллов. Все критерии независимы и суммируются. Могут встречаться решения, под критерии не подпадающие - например, нестандартные решения, решения, основанные на совершенно другой идее и т.д. В таких случаях, разумеется, их стоит оценивать исходя из каких-нибудь других соображений. Однако, полное решение ВСЕГДА даёт максимальный балл по задаче.

Задача 1.

В воронке будет столько же воды, как если бы Роман просто держал воронку целиком под дождём на протяжении 15 секунд (с доказательством) - +1 балл.

Написано уравнение (верное), из которого можно определить концентрацию – +1 балл

Верный ответ на второй вопрос задачи - +1 балл

Задача 2.

Нужно передать ту же теплоту, поэтому время соотносится как отношение мощностей +1 балл

Мощности отличаются в четыре раза +1 балл

Учёт теплопотерь увеличивает ответ (с доказательством!) +1 балл

Задача 3.

Эффективная масса аппарата в воде равняется 6 кг - +1 балл.

Выталкивающая сила надувного круга прямо пропорциональна его объёму на глубине 10 метров - +1 балл

А объём на глубине 10 метров - объёму на поверхности - +1 балл

Если человек сказал все три вещи, но тем не менее почему-то не решил задачу - он получает два балла.

Задача 4.

Верно найдена зависимость от времени, начиная с момента $t = 6$ часов - +1 балл

Написаны явные выражения для линейных функций исходных графиков - +1 балл

Верно перемножены функции, построен график - +1 балл.

За построение графика по точкам человек получает 1.5 балла и вопрос „а что у вас за функция до момента $t = 6$ часов?“

Задача 5.

Когда весь лёд растает, давление будет равно 3 кПа - +1 балл

Общий вид графика - +2 балла

Определено количество льда, плавящегося за единицу времени - +1 балл

Верно определён момент, когда лёд всплывёт (он же момент перелома графика) - +2 балла

Задача 6.

Верно определено сжатие одной пружины - +2 балла

Верно определно сжатие ещё двух пружин - +2 балла

Вычислена длина амортизатора - +2 балла

Задача 7.

Задача решена при каком-нибудь значении u - +1 балл

Написано явное выражение для количества деталей, которые посчитает прибор, от скорости u - +2 балла

Исследование графика: 2 балла:

- График имеет 0 при $u = 10$ см/с - +0.5 балла
- При $u \to +\infty$ прибор проверит 16 деталей - +0.5 балла
- При $u \to 0$ количество деталей, которые посчитает прибор, будет стремиться к бесконечности - +0.5 балл

Обсуждение того, что график на самом деле дискретен (ступеньками) - +1 балл