

# Городской тур 2014. 11 класс

## Задача 1.

Запишем зависимость давления и объема от времени в виде формул. При временах  $0 \leq t \leq t_0$

$$p(t) = p_0 + \frac{p_0}{t_0}t = p_0 \left(1 + \frac{t}{t_0}\right), \quad V(t) = 3V_0 - \frac{V_0}{t_0}t = 3V_0 \left(1 - \frac{t}{3t_0}\right).$$

Из уравнения Клапейрона-Менделеева температура пропорциональна произведению этих величин:

$$T(t) = \frac{p(t)V(t)}{\nu R} = \frac{3p_0V_0}{\nu R} \left(1 + \frac{t}{t_0}\right) \left(1 - \frac{t}{3t_0}\right), \quad (1)$$

здесь  $R$  – универсальная газовая постоянная,  $\nu$  – количество вещества газа. Поскольку при  $t = 0$  это выражение равно  $3p_0V_0/\nu R$ , а с другой стороны по условию это  $T_0$ , ф-лу (1) можно переписать:

$$T(t) = T_0 \left(1 + \frac{t}{t_0}\right) \left(1 - \frac{t}{3t_0}\right).$$

График этой зависимости – парабола, ветви которой направлены вниз, а корни  $t = -t_0$  и  $t = 3t_0$ . Вершина параболы в точке  $t = t_0$ , значение в вершине  $T(t_0) = 4T_0/3$ . Итак, на интервале  $0 \leq t \leq t_0$  температура возрастает со временем, достигая в точке  $t = t_0$  максимума.

Для исследования температуры при временах  $t_0 \leq t \leq 2t_0$ , используем для зависимости давления и объема от времени формулы

$$p(t) = 2p_0, \quad V(t) = 3V_0 \left(1 - \frac{t}{3t_0}\right).$$

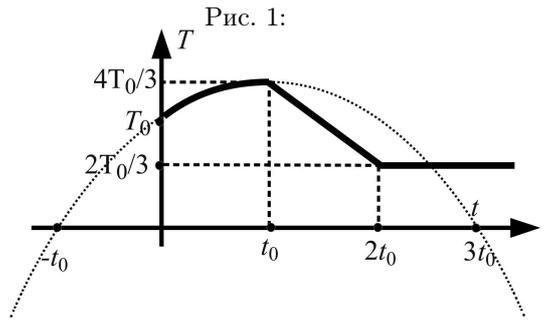
Рассуждая аналогично, получим

$$T(t) = \frac{6p_0T_0}{\nu R} \left(1 - \frac{t}{3t_0}\right) = 2T_0 \left(1 - \frac{t}{3t_0}\right),$$

что на этом интервале соответствует линейному убыванию температуры от  $T(t_0) = 4T_0/3$  до  $T(2t_0) = 2T_0/3$ . Наконец, при больших временах  $p(t) = 2p_0$ ,  $V(t) = V_0$ , поэтому температура  $T(t) = 2p_0V_0/\nu R = 2T_0/3$  не меняется.

Изобразив всю полученную информацию на одном графике, получим ответ.

Ответ: Требуемый график изображен жирной линией на рис. 1.



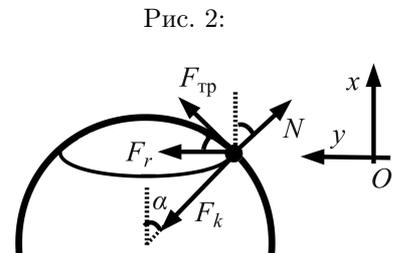
## Задача 2.

Пусть в данный момент радиус шара  $R$ , а радиус траектории робота  $r$ ; по условию  $R = rs$ .

Рассмотрим силы, действующие на робота при движении по окружности, нарисованной маркером. Сила кулоновского притяжения  $F_k = k|qQ|/R^2$  и сила реакции опоры  $N$  направлены по линии, соединяющей робота и центр шара. Результирующая всех сил, действующих на робота (обозначим ее  $F_r$ ), должна быть направлена к центру окружности, по которой движется робот. Сумма  $F_k$  и  $N$  не может быть туда направлена. Это означает, что описанное в задаче движение возможно лишь при наличии силы трения  $F_{тр}$  (см. рис. 2).

Сила трения в этой задаче "отвечает" за два процесса: во-первых, она не дает роботу съехать с нарисованной линии, обеспечивая верное центростремительное ускорение; во-вторых, позволяет колесам/ногам/гусеницам робота разогнаться до нужной скорости по поверхности шара. Если робот уже разогнался до нужной скорости, функция трения сводится исключительно к удержанию его на линии. Если же силу трения мысленно "отключить", робота снесет на "экватор" шара.

Угол  $\alpha$ , характеризующий "широту" окружности, по которой движется робот, можно найти, зная, что  $r = R \sin \alpha = R/s$ , откуда  $\sin \alpha = 1/s$ ,  $\cos \alpha = \sqrt{s^2 - 1}/s$ .



Запишем условие о том, что сумма сил  $F_k$ ,  $N$ ,  $F_{\text{ТР}}$  направлена в центр окружности, по которой движется робот, и равна  $F_r = mV^2/r$  (обратите внимание, в качестве радиуса в формуле центростремительного ускорения берется радиус *траектории*, а не шара). В проекции на оси  $Ox$  и  $Oy$  это даст

$$Ox : \quad F_{\text{ТР}} \sin \alpha + N \cos \alpha = F_k \cos \alpha \quad (2)$$

$$Oy : \quad F_k \sin \alpha + F_{\text{ТР}} \cos \alpha - N \sin \alpha = \frac{mV^2}{r}. \quad (3)$$

Итак, движение по линии возможно, если колеса робота не проскальзывают, т.е. когда  $F_{\text{ТР}} < \mu N$ . Критическое значение силы трения  $F_{\text{ТР}} = \mu N$  характеризует предельную ситуацию, когда силы трения только-только хватает на то, чтобы робота не снесло с нарисованной окружности. Подставляя это в ф-лу (2), выразим

$$N = \frac{F_k \cos \alpha}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha},$$

подставляя это  $N$  в (3) получим, с учетом  $r = R \sin \alpha$  и  $F_{\text{ТР}} = \mu N$ ,

$$F_k \sin \alpha + \frac{F_k \cos \alpha}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha} (\mu \cos \alpha - \sin \alpha) = \frac{mV^2}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mu F_k}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha} = \frac{mV^2}{R \sin \alpha}$$

Подставляя сюда  $F_k = k|Qq|/R^2$  и выражая  $R$ , найдем критическое значение радиуса шара, при котором силы трения еще "хватает" для требуемого движения:

$$\frac{k|Qq|}{R^2} \frac{\mu}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha} = \frac{mV^2}{R \sin \alpha} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{k|Qq|\mu \sin \alpha}{mV^2(\cos \alpha + \mu \sin \alpha)} = \frac{k|Qq|\mu}{mV^2(\sqrt{s^2 - 1} + \mu)}. \quad (4)$$

Физически этот результат следует трактовать так: при надувании шара сила  $F_k$ , прижимающая робота к шару, уменьшается обратно пропорционально  $R^2$ . Вместе с ней уменьшается сила трения скольжения  $\mu N$ . Центробежная сила  $mV^2/R \sin \alpha$ , которая срывает робота с линии на экватор, также уменьшается, но слабее, обратно пропорционально  $R$ , поэтому с ростом шара сила трения покоя все ближе к критическому значению  $\mu N$ , затем сравнивается с ним, а затем центробежная сила "побеждает", снося робота с нарисованной линии на окружность большего радиуса.

Далее, робот может двигаться лишь по более широкой окружности, чем исходно нарисованная. Ее можно характеризовать величиной  $s'$ , введенной для этой окружности аналогично тому, как  $s$  характеризовало исходную траекторию, причем по мере дальнейшего надувания шара величина  $s'$  растет. Все выведенные формулы с заменой  $s$  на  $s'$  остаются справедливыми. Когда  $s'$  сравнивается с единицей, робот сможет двигаться только по экватору, а сила трения пропадет. Уравнение движения по окружности примет вид

$$F_k - N = \frac{mV^2}{R}.$$

Дальнейшее раздувание шара приведет к тому, что силы  $F_k$  в какой-то момент не хватит, чтобы прижать робота к шару, т.е.  $N = F_k - mV^2/R$  обратится в ноль, а робот станет двигаться вокруг шара с первой космической скоростью. Выразим радиус шара, при котором это произойдет

$$\frac{k|Qq|}{R^2} = \frac{mV^2}{R} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{k|Qq|}{mV^2}.$$

Итак, робот стал двигаться вокруг шара с "первой космической" скоростью  $\sqrt{k|Qq|/Rm}$ , если провести аналогию между силой Кулона  $kQq/R^2$  и гравитационной силой притяжения  $GMm/R^2$ . Можно это сформулировать иначе: первая космическая скорость, характеризующая отрыв робота от шара уменьшалась и сравнивалась со скоростью движения робота по шару.

Так как шар продолжает раздуваться, первая (и вторая) космическая скорость будет продолжать падать. Робот же будет должен переходить на более высокую орбиту с большим моментом вращения. При этом он будет вынужден касаться колесами шара, разгоняясь (за счет силы трения!) до требуемой скорости относительно поверхности, чтобы увеличивать свой момент орбитального вращения. Скорость его движения будет уже в промежутке между первой и второй космической, так что траектория движения робота вокруг шара – эллипс. В этот период робот касается шара колесами эпизодически.

В некоторый момент его скорость  $V$  окажется больше *второй* космической скорости шара, которая продолжает убывать вместе с раздуванием шара:

$$\frac{k|Qq|}{R} = \frac{mV^2}{2} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{2k|Qq|}{mV^2}.$$

После этого робот покинет шар навсегда.

Ответ: Робот не сможет двигаться по линии начиная с радиуса

$$R = \frac{k|Qq|\mu}{mV^2(\sqrt{s^2 - 1} + \mu)}.$$

При  $R = k|Qq|/mV^2$  робот перестанет соприкасаться с шаром непрерывно, а при  $R = 2k|Qq|/mV^2$  покинет его навсегда.

### Задача 3.

Рассмотрим луч, падающий на цилиндр в некоторой точке  $A$ , расположенной под углом  $\alpha = \angle ACO$ . Так как  $\sin \alpha$  не превышает отношения толщины пластины к радиусу цилиндра, а по условию эта величина мала, при решении можно пользоваться малостью  $\alpha$ .

Угол падения отсчитывается от нормали к поверхности, которая в данном случае совпадает с радиусом  $CA$ . После преломления по закону Снеллиуса свет распространяется в стекле по некоторой прямой  $AB$ , у которой  $\sin \alpha = n \sin \beta$ , что эквивалентно при малых углах соотношению

$$\beta = \frac{\alpha}{n}.$$

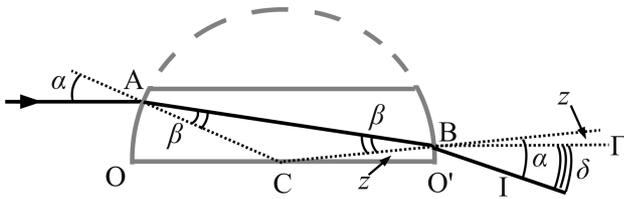


Рис. 3:

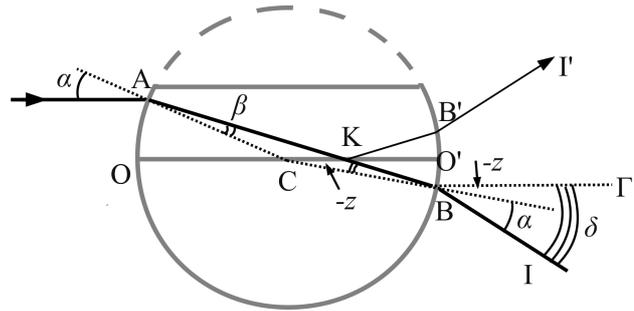


Рис. 4:

Возможны две ситуации, изображенные на рис. 3 и 4. Предположим сначала, что после преломления на левой, искривленной поверхности цилиндра луч попал сразу на правую искривленную поверхность (см. рис. 3). Точку попадания луча назовем  $B$ . Это действительно произойдет, если  $\angle BCO'$  (обозначим его  $z$ ), равный  $\pi - \angle OCB$ , больше нуля – в противном случае луч сначала попадет на нижнюю плоскость пластины. Так как  $\triangle ABC$  равнобедренный, в нем  $\angle A = \angle C = \beta$ , поэтому  $\angle C = \pi - 2\beta$ . Тогда

$$z = \pi - \angle OCB = \pi - \angle OCA - \angle ACB = \pi - \alpha - (\pi - 2\beta) = 2\beta - \alpha.$$

Условие  $z \geq 0$  эквивалентно  $\alpha \leq 2\beta = 2\alpha/n$ , т.е.  $n \leq 2$ . Это условие не содержит  $\alpha$ , поэтому оно либо выполняется для любого луча из исходно падающих на цилиндр, либо не выполняется опять же для любого из этих лучей.

После второго преломления в точке  $B$  луч выходит под углом  $\alpha$  к нормали  $CB$ . Угол же к исходному направлению лучей, к линии  $B\Gamma$  ( $B\Gamma \parallel OO'$ ), составляет

$$\delta = \alpha - z = \alpha - (2\beta - \alpha) = 2(\alpha - \beta).$$

Выясним, где вышедший луч  $BI$  пересечет  $OO'$  (см рис. 5).  $BI$  образует  $\triangle BFO'$ , в котором  $|BO'| = |FO'| \tan \delta \simeq |FO'| \delta$ . С другой стороны,  $|BO'| = |CB| \sin z \simeq |CB| z = Rz$ . Приравнявая  $|BO'|$ , получим

$$|FO'| = R \frac{z}{\delta} = R \frac{2\beta - \alpha}{2(\alpha - \beta)}.$$

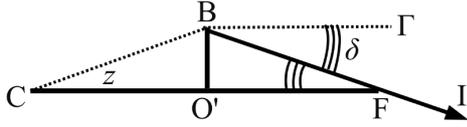


Рис. 5:

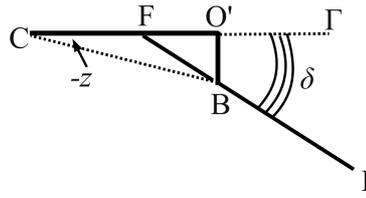


Рис. 6:

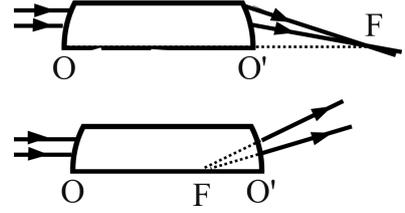


Рис. 7:

С учетом  $\alpha/\beta = n$  последнее равенство переписывается в виде

$$|FO'| = R \frac{2-n}{2(n-1)},$$

эта величина характеризует расположение "фокальной линии" (проходящей через точку F перпендикулярно рисунку) – именно на ней все падающие на цилиндр лучи пересекут плоскость  $OO'$ .

Второй случай представлен на рисунке 4. Здесь после преломления в точке A луч попадает на нижнюю плоскость пластины и испытывает полное внутреннее отражение в точке K, так как угол, под которым он попадает на поверхность, близок к  $\pi$ . Видно, что соответствующая картинка представляет собой случай  $z < 0$ , при этом после отражения луч  $KB'$  идет симметрично по отношению к вспомогательному лучу  $KB$ , который шел бы через полный цилиндр и описывался бы формулами с  $z < 0$ . Вспомогательный луч вышел бы из цилиндра под углом  $\delta = 2(\alpha - \beta)$  к  $B\Gamma$ , отклонившись от  $B\Gamma$  вниз, а настоящий луч  $B'I'$  – под тем же углом, только отклонившись вверх.

$B'I'$  и  $B'I$  выйдут из цилиндра, как если бы были испущены из некоторой точки F. Положение этой точки представлено на рисунке 6, из которого следует

$$|FO'|\delta = |BO'| = |CB| \cdot |z| \quad \Rightarrow \quad |FO'| = R \frac{|z|}{\delta} = R \frac{|2-n|}{2(n-1)} = R \frac{n-2}{2(n-1)}.$$

Ответ: В плоскости рисунка данная оптическая система собирает заданный параллельный пучок лучей в некоторую точку F (действительную или мнимую). При  $n < 2$  эта точка расположена правее точки  $O'$  пластины на расстоянии  $R(2-n)/(2n-2)$ , и лучи действительно пересекаются в точке F (см. верхний рис.7). При  $n > 2$  пересекаются не сами лучи, а их продолжения внутрь цилиндра, левее точки  $O'$  цилиндра на  $R(n-2)/(2n-2)$  (см. нижний рис.7). В случае  $n = 2$  описанные случаи совпадают, лучи пучком выходят из точки, совпадающей с точкой  $O'$ .

Отметим, что данная оптическая система не является, строго говоря, собирающей или рассеивающей *все* лучи в одной точке – это верно только для лучей в плоскости рисунка; лучи из другой параллельной плоскости соберутся в своей точке, поэтому уместно говорить о собирающей/рассеивающей линии F, перпендикулярной плоскости рисунка.

#### Задача 4.

Пусть для определенности стрелка перемещается к правому концу спирали. В описанной системе имеется два замкнутых контура, магнитный поток через которые меняется при движении стрелки: контур KOS и контур  $O'MS$ . Обозначим сопротивления этих контуров в момент времени  $t$  через  $R_1(t)$  и  $R_2(t)$  соответственно.

В результате изменения магнитного потока, в каждом из этих контуров появится ЭДС индукции (по закону Фарадея). Вычислим эту ЭДС. Стрелку по условию перемещают равномерно, значит магнитный поток меняется равномерно: за время  $T = 2\pi/\omega$  конец стрелки совершает полный оборот. При этом число витков левой полуспиралы увеличивается на единицу, а число витков правой – уменьшается на столько же. Магнитный поток в обеих полуспиралах меняется на  $B\pi a^2$ , соответственно в каждой полуспирале ЭДС равна

$$|\mathcal{E}| = \frac{B\pi a^2}{T} = \frac{Ba^2\omega}{2}.$$

Таким образом, в двух упомянутых контурах возникнут токи:  $I_1(t) = \mathcal{E}/R_1(t)$  в контуре KOS и  $I_2(t) = \mathcal{E}/R_2(t)$  в контуре  $O'MS$ .

Разберемся, как направлены эти токи. Магнитный поток контура O'MS убывает, ведь у этого контура со временем уменьшается число витков. По правилу Ленца ток, возникающий в контуре, будет создавать внутри себя магнитное поле, чтобы *компенсировать* уменьшение магнитного потока. Т.е. магнитное поле тока  $I_2$  будет направлена также, как и  $B$ . Рассуждая аналогично, получим, что магнитное поле тока  $I_1$  компенсирует увеличение магнитного потока в контуре КОС, поэтому направлено противоположно внешнему магнитному полю  $B$ . Итак, мы получили, что при движении стрелки токи в полуспиралях будут направлены в разные стороны.

Несложно понять, что при этом данные токи будут *складываться*, протекая через стрелку. Суммарный ток, текущий через стрелку в данный момент, будет

$$I = I_1(t) + I_2(t) = \frac{\mathcal{E}}{R_1(t)} + \frac{\mathcal{E}}{R_2(t)} = \frac{Ba^2\omega}{2} \left( \frac{1}{R_1(t)} + \frac{1}{R_2(t)} \right), \quad (5)$$

поэтому на стрелку со стороны внешнего поля будет действовать сила Ампера  $IBa$ . Именно такую силу надо прикладывать к стрелке, чтобы скомпенсировать эту силу – чтобы она двигалась равномерно. Остальными силами – трения, тяжести, влиянием магнитного поля самой катушки – следует пренебречь по условию задачи.

Осталось найти зависимости  $R_1(t)$  и  $R_2(t)$ . Первоначально, при  $t = 0$ , эти сопротивления были равны  $R/2$ , затем они убывают или возрастают на величину сопротивления одного витка  $R/N$  за каждый промежуток времени  $T$ :

$$R_1(t) = \frac{R}{2} + \frac{R}{N} \frac{t}{T} = \frac{R}{2} + \frac{Rt\omega}{2N\pi} = \frac{R(\pi N + \omega t)}{2\pi N}, \quad R_2(t) = \frac{R(\pi N - \omega t)}{2\pi N}.$$

Подставляя это в (5), находим  $I$ , а затем силу  $IBa$ .

**Ответ:** Необходимо прикладывать силу, компенсирующую силу Ампера, направленную поперек стрелки, равную по модулю

$$F_A = \frac{2\pi^2 N^2 B^2 a^3 \omega}{R(\pi^2 N^2 - \omega^2 t^2)}.$$

### Задача 5.

Заштрихованная полуплоскость будет иметь отличный от нуля заряд, потому что свободные электроны металла взаимодействуют с зарядом  $q$  и перераспределяются по заземленной плоскости (говорят, "на плоскости *индуцируется* заряд"). При этом из метода зеркальных изображений в электростатике известно, что поле этих электронов над плоскостью будет таким же, как если бы самой плоскости и электронов на ней не было, зато под плоскостью, зеркально по отношению к заряду  $q$ , располагался бы заряд  $-q$ , см. рис. 8.

На самом деле, конечно, под плоскостью никакого заряда нет, в реальности заряд электронов как-то размазан по самой плоскости. Больше всего зарядов индуцировано напротив заряда, к краям плоскости плотность индуцированного заряда убывает. Из метода зеркальных изображений следует, что в любой точке над плоскостью напряженность поля такого изображения в точности такая же, как от поля системы индуцированных электронов. Отметим, что подробно познакомиться с методом зеркальных изображений можно, например, в учебнике Е.И. Бутиков, А.А. Быков, А.С. Кондратьев "Физика в примерах и задачах" в разделе "Электростатика".

Хотя неизвестно, как именно распределен заряд по плоскости, из метода заркальных изображений также следует, что суммарный заряд плоскости равен  $-q$ . Действительно, если поле над плоскостью такое же, как от изображения, то, окружив плоскость замкнутой поверхностью  $S$  и вычислив поток электрического поля через эту поверхность, получим такой же результат, как для потока через эту поверхность от изображения  $-q$ ; с другой стороны, по теореме Гаусса поток через  $S$  однозначно задается зарядом тела (системы тел), находящихся внутри  $S$ . Значит, если изображение  $-q$  и индуцированные электроны создают одинаковое поле на поверхности  $S$ , то и суммарный заряд индуцированных электронов равен  $-q$ .

Теперь понятно, что когда заряд будет располагаться ровно над серединой плоскости, где-то на прямой  $OO'$ , датчик будет показывать  $Q_0 = -q/2$ . Такие точки на графике действительно есть, они соответствуют  $x = 0$ . Именно в этих точках заряд пересекал  $OO'$ .

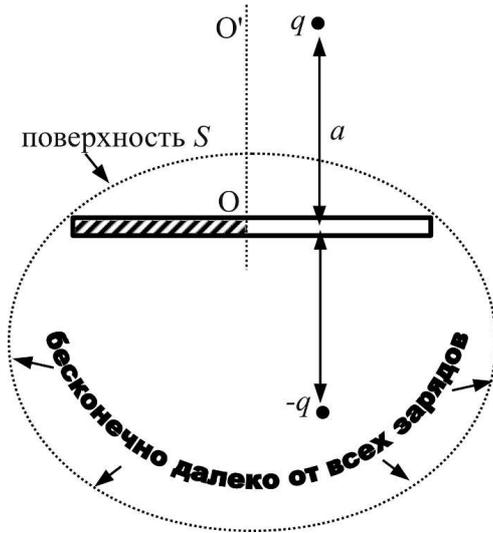


Рис. 8:

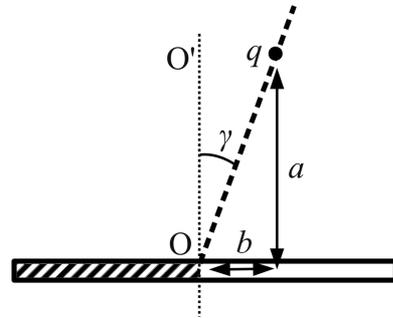


Рис. 9:

Из графика видно, что на некоторых участках изменение координаты  $x$  заряда не сопровождается изменением показаний датчика: см. горизонтальные участки на интервалах  $x \in (3x_0, 9x_0)$  и  $x \in (-12x_0, -6x_0)$ . Покажем, что траектория заряда над плоскостью при этом должна быть прямолинейным отрезком, продолжение которого проходит через  $O$ , см. рис. 9.

Действительно, зададим некоторое положение заряда над плоскостью, например, с помощью координат  $a, b$ , отсчитанных от точки  $O$ . Показания датчика могут зависеть от трех параметров системы:  $q, a$  и  $b$ . Заметим, что дополнительных параметров размерности длины, не зависящих от  $a$  и  $b$ , в системе нет. Однако, поскольку показания датчика  $Q(q, a, b)$  имеют размерность заряда, размерности параметров  $a$  и  $b$  в функции  $Q(q, a, b)$  должны сократиться. Поэтому с необходимостью

$$Q(q, a, b) \equiv q \cdot f(a/b),$$

где  $f(a/b)$  – некоторая неизвестная нам функция.

Но ведь это означает, что если при движении заряда над плоскостью угол  $\gamma$  неизменен ( $\text{tg } \gamma = b/a$ ), индуцированный заряд  $Q$  постоянен.

Величина этого заряда зависит от угла  $\gamma$ . При  $\gamma = 0$  индуцированный заряд, как уже отмечалось, равен  $Q_0 = -q/2$ . Отклонение  $Q$  от этого значения связано с ненулевой величиной угла  $\gamma$ . Из графика видно, что на интервалах постоянного  $Q$  (при  $x \in (3x_0, 9x_0)$  и  $x \in (-12x_0, -6x_0)$ ) отклонение заряда от симметричного значения  $Q_0$  одинаковы и составляют 6 клеток. Это значит, что траектория содержит отрезки, представленные на рис. 10), у которых  $\gamma$  одинаков по модулю. (На этом же рисунке внизу мы схематично приводим исходный график  $Q(x)$  для удобства).

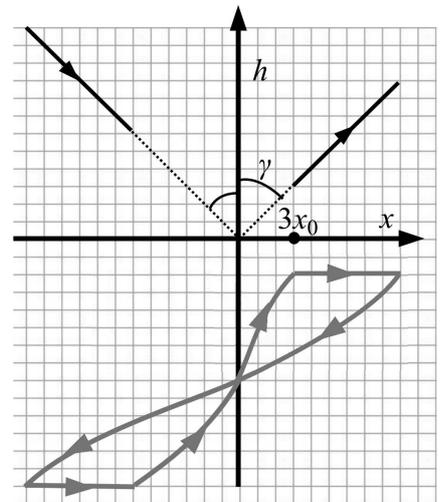


Рис. 10:

Правильно расположить эти отрезки над плоскостью (правильно масштабировать график по оси ординат) помогает известное значение  $h_0$  – из рисунка 10 понятно, что минимальное  $h$  реализуется при  $x = 3x_0$ . Осталось лишь соединить полученные точки отрезки и получить искомый четырехугольник, см. рис. 11.

Ответ: Траектория представлена на рис. 11.

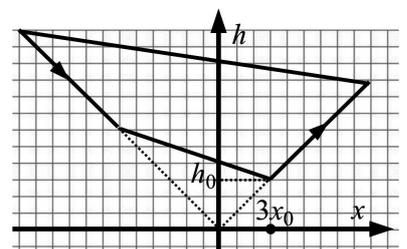


Рис. 11: