

# Городской тур 2014. 10 класс

## Задача 1.

Определим, какой высоты  $y(x)$  должна быть стена в произвольной точке  $x$ , для того, чтобы мяч, брошенный Петром, обязательно был пойман Олегом.

В точку броска Пётр попадет через время  $t_1 = x/v$ . Поскольку мяч перебрасывают таким образом, что он перелетает стену на минимальной высоте, заключаем, что время перелета равно  $\tau = 2\sqrt{2y(x)/g}$ . Олег придет в точку  $x$  к моменту времени  $t_2 = x/u$ . Отсюда получаем условие на то, что любой брошенный мяч будет пойман:

$$t_1 + \tau = t_2 \Leftrightarrow y(x) = x^2 \frac{g}{8} \left( \frac{1}{u} - \frac{1}{v} \right)^2$$

Таким образом, стена должна иметь параболический профиль. Естественно, что при  $u > v$  данная задача не имеет решения. При  $u = v$  парабола вырождается в прямую  $y = 0$ , то есть стена вообще должна отсутствовать. Ответ не зависит от расстояния между Петром и Олегом в начальный момент, время перелета определяется только высотой стены.

Ответ: Необходимый профиль стены:  $y = gx^2(v - u)^2/8u^2v^2$ .

## Задача 2.

Запишем зависимость давления и объема от времени в виде формул. При временах  $0 \leq t \leq t_0$

$$p(t) = p_0 + \frac{p_0}{t_0}t = p_0 \left( 1 + \frac{t}{t_0} \right), \quad V(t) = 3V_0 - \frac{V_0}{t_0}t = 3V_0 \left( 1 - \frac{t}{3t_0} \right).$$

Из уравнения Клапейрона-Менделеева температура пропорциональна произведению этих величин:

$$T(t) = \frac{p(t)V(t)}{\nu R} = \frac{3p_0V_0}{\nu R} \left( 1 + \frac{t}{t_0} \right) \left( 1 - \frac{t}{3t_0} \right), \quad (1)$$

здесь  $R$  – универсальная газовая постоянная,  $\nu$  – количество вещества газа. Поскольку при  $t = 0$  это выражение равно  $3p_0V_0/\nu R$ , а с другой стороны по условию это  $T_0$ , ф-лу (1) можно переписать:

$$T(t) = T_0 \left( 1 + \frac{t}{t_0} \right) \left( 1 - \frac{t}{3t_0} \right).$$

График этой зависимости – парабола, ветви которой направлены вниз, а корни  $t = -t_0$  и  $t = 3t_0$ . Вершина параболы в точке  $t = t_0$ , значение в вершине  $T(t_0) = 4T_0/3$ . Итак, на интервале  $0 \leq t \leq t_0$  температура возрастает со временем, достигая в точке  $t = t_0$  максимума.

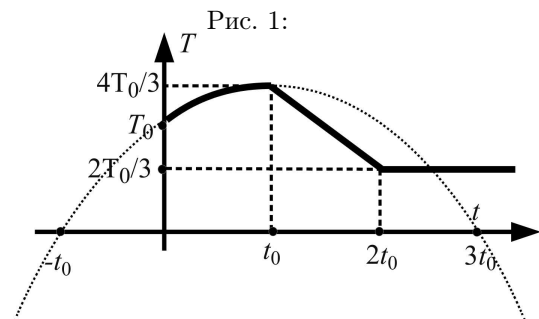
Для исследования температуры при временах  $t_0 \leq t \leq 2t_0$ , используем для зависимости давления и объема от времени формулы

$$p(t) = 2p_0, \quad V(t) = 3V_0 \left( 1 - \frac{t}{3t_0} \right).$$

Рассуждая аналогично, получим

$$T(t) = \frac{6p_0V_0}{\nu R} \left( 1 - \frac{t}{3t_0} \right) = 2T_0 \left( 1 - \frac{t}{3t_0} \right),$$

что на этом интервале соответствует линейному убыванию температуры от  $T(t_0) = 4T_0/3$  до  $T(2t_0) = 2T_0/3$ . Наконец, при больших временах  $p(t) = 2p_0$ ,  $V(t) = V_0$ , поэтому температура  $T(t) = 2p_0V_0/\nu R = 2T_0/3$  не меняется.



Изобразив всю полученную информацию на одном графике, получим ответ.

Ответ: Требуемый график изображен жирной линией на рис. 1.

### Задача 3.

На призмы, погруженные в жидкость, действует выталкивающая сила Архимеда. Она возникает из-за того, что давление жидкости с глубиной увеличивается, вследствие чего жидкость снизу давит на призмы сильнее, чем сверху. По условию призмы плавают, а значит силы Архимеда, действующие на них, уравниваются силами тяжести. Рассмотрим условия вертикального равновесия призм.

Обозначим давление жидкости на глубине  $h_0$  (верхняя грань призм) через  $p_0$ , давление на глубине  $h_0 + a$  (нижняя грань) — через  $p_1$ . Силы, действующие на призмы и имеющие вертикальные проекции, изображены на Рис.2. На этом рисунке сила  $F$  — суммарная сила давления жидкости на наклонную грань. Поскольку форма призм одинакова, и погружены они на одинаковую глубину, в обоих случаях сила  $F$  имеет одну и ту же величину. Это является следствием закона Паскаля.

Выпишем второй закон Ньютона для обеих призм в проекции на ось  $Oy$ :

$$p_1 \cdot 3a^2 - 2F_y - p_0 \cdot a^2 - mg = 0 \quad (2)$$

$$p_1 \cdot a^2 + 2F_y - p_0 \cdot 3a^2 - m'g = 0 \quad (3)$$

Складывая уравнения (2) и (3), получаем, что

$$4a^2 \frac{p_1 - p_0}{g} - m = m' \quad (4)$$

Таким образом, остается только определить перепад давления жидкости  $p_1 - p_0$  при переходе от глубины  $h_0$  к  $h_0 + a$ . Для этого разобьем отрезок от  $h_0$  до  $h_0 + a$  на  $N$  равных промежутков величиной  $\Delta h = a/N$ . Будем считать, что  $N$  достаточно большое. Тогда для любого из получившихся малых промежутков  $[h_0 + (n-1)\Delta h, h_0 + n\Delta h]_{n=1..N}$  можно считать, что плотность не успевает заметно измениться на протяжении промежутка и равняется приблизительно  $\rho(h_0 + n\Delta h)$ . Следовательно, приращение давления на этом малом промежутке равно  $\Delta p = \rho(h_0 + n\Delta h)g\Delta h$ . Данное выражение можно понимать как умноженную на  $g$  площадь под графиком плотности на нашем малом интервале (при этом, чем меньше  $\Delta h$ , тем точнее данное соответствие). Тогда, просуммировав по всем  $N$  промежуткам, получаем, что искомым перепад давления равен умноженной на  $g$  площади под графиком плотности на интервале  $[h_0, h_0 + a]$ . Эту площадь обозначим через  $S$ . Приведенное выше рассуждение является стандартным, поэтому здесь опущены некоторые детали. Нечто похожее можно, например, встретить при изучении кинематики материальной точки, когда делается вывод, что площадь под графиком скорости есть перемещение тела (сравните,  $\Delta x = v(t)\Delta t \Leftrightarrow \Delta p = g\rho(h)\Delta h$ ).

Окончательно, для массы второй призмы получаем

$$4a^2 S - m = m' \quad (5)$$

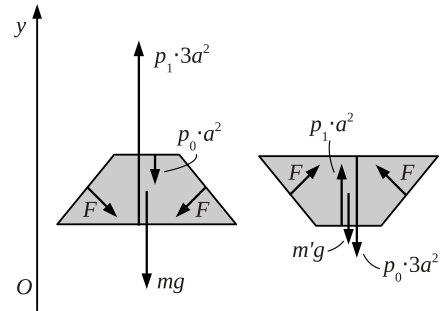


Рис. 2:

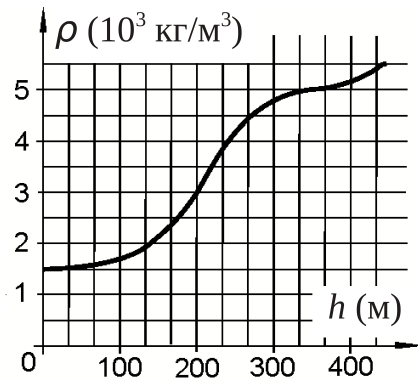


Рис. 3:

Площадь  $S$  легко можно найти, используя Рис. 3.

В условии задачи, к несчастью, вкралась ошибка. Приведенное там значение массы первой призмы (25 мегатонн) является слишком большим: такая призма не сможет плавать на глубине  $h_0$ , она будет тонуть. Правильное значение для массы первой призмы можно получить, аккуратно рассчитав действующую на нее силу Архимеда.

Действительно, по закону Архимеда, масса плавающего тела равна массе вытесненной им жидкости. Чтобы найти массу вытесненной жидкости, вновь разделим интервал от  $h_0$  до  $h_0 + a$  на  $N$  равных промежутков величиной  $\Delta h$ . Можно считать, что на каждом малом интервале площадь сечения призмы не успевает значительно измениться и равняется

$$S(h_0 + n\Delta h) = a^2 + 2a(n\Delta h)$$

(для интервала  $[h_0 + (n-1)\Delta h, h_0 + n\Delta h]$ ). Тогда масса жидкости, вытесненной соответствующим маленьким кусочком призмы, равна

$$\Delta m = \rho(h_n)S(h_n)\Delta h, \quad h_n = h_0 + n\Delta h.$$

Просуммировав по всем малым интервалам, получаем, что масса жидкости равняется площади под графиком функции  $\rho(h)S(h)$ , где  $S(h)$  — площадь сечения призмы на глубине  $h$ . Численно посчитать данную площадь гораздо сложнее, чем просто оценить площадь под графиком плотности. Однако, если аккуратно проделать вычисления, то можно показать, что масса первой призмы должна равняться приблизительно 21,4 мегатонны. Естественно, что приведенные выше рассуждения можно в равной степени применить и ко второй призме, непосредственно получив ее массу.

Если использовать правильное значение массы первой призмы, то есть приблизительно 21,4 мегатонны, и формулу (5), то масса второй призмы оказывается равной приблизительно

$$m' \approx 18,9 \text{ мегатонн.}$$

Еще раз отметим, что данный ответ можно также получить, посчитав площадь под графиком произведения плотности жидкости и площади сечения второй призмы.

Если использовать значение массы первой призмы, приведенное в условии, то масса второй призмы равна приблизительно

$$m' \approx 16 \text{ мегатонн.}$$

**Ответ:** Правильный ответ: приблизительно 18,9 мегатонны. Ответ с учетом опечатки в условии: приблизительно 16 мегатонн.

*Примечание:*

Работы участников, получивших формулу (5) и использовавших в качестве массы первой призмы число, приведенное в условии, будут оцениваться из полного балла.

Работы участников, вычисливших силу Архимеда, действующую на вторую призму, и нашедших ее массу, будут оцениваться из полного балла.

Работы участников, аргументированно доказавших, что задача поставлена некорректно и что первая призма должна утонуть, будут оцениваться из полного балла.

Жюри приносит свои извинения за допущенную в условии неточность.

**Задача 4.**

Рассмотрим сначала первый эксперимент (Рис. 4а). Заметим, что в силу симметрии вдоль вертикальной координаты, точки решетки, имеющие одинаковую горизонтальную координату, находятся под одинаковым напряжением. Иными словами напряжение между всеми точками на любой вертикальной прямой равно нулю (про такие точки говорят, что они имеют одинаковый электрический потенциал).

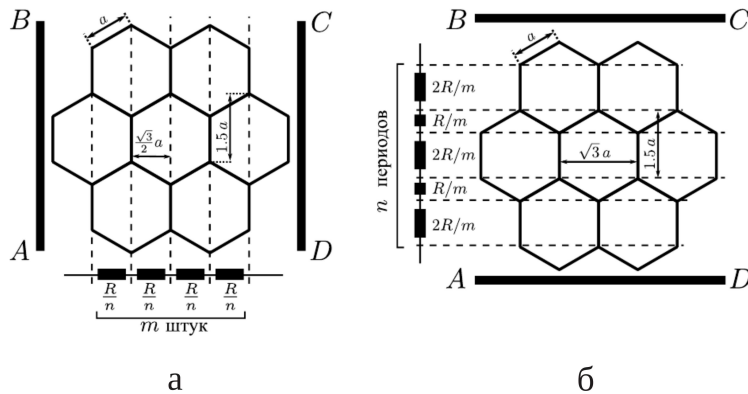


Рис. 4:

Узлы, имеющие одинаковый потенциал (через них на рисунке проведены пунктирные линии) можно объединить в одну точку, и сопротивление решетки при этом не изменится. Сделав это получим изображенную на Рис. 4а эквивалентную схему. Каждое сопротивление в ней получилось из параллельного соединения  $n$  сопротивлений  $R$ , а значит равно  $R/n$ , где  $n$  — определяется количеством ячеек, попавших в квадрат. Чтобы найти  $n$  заметим, что расстояние между сопротивлениями по вертикали равно  $1,5a$ , а размер решетки по вертикали равен  $L$ . Значит  $n = L/(1,5a)$ . Расстояние между сопротивлениями по горизонтали равно  $\sqrt{3}a/2$ , а значит всего в эквивалентной схеме последовательно соединено

$$m = \frac{L}{\sqrt{3}a/2}$$

сопротивлений.

Тогда получаем, что полное сопротивление измеренное в первом эксперименте, равно

$$R_0 = m \times R/n = \sqrt{3}R.$$

Перед тем как вычислять сопротивление, измеренное во втором эксперименте, рассмотрим вспомогательную задачу: что получилось бы, если бы напряжение приложили между сторонами  $AD$  и  $BC$  первого квадрата, см. Рис. 4б. Рассуждая аналогично, объединим точки с равными потенциалами (напряжение между этими точками равно нулю). В результате придем к эквивалентной схеме, изображенной на Рис. 4б. В отличие от предыдущего случая в этой схеме чередуются сопротивления двух сортов: полученные из параллельного соединения  $m$  сопротивлений  $R$  и из параллельного соединения  $m/2$  сопротивлений  $R$ . Сопротивлений каждого из сортов в схеме будет  $n$  штук. Числа  $n$  и  $m$ , как легко проверить, здесь такие же как и в предыдущем случае. Тогда получаем полное сопротивление

$$R_0 = n \times \frac{R}{m} + n \times \frac{R}{m/2} = 3nR/m = \sqrt{3}R.$$

Таким образом, в нашей вспомогательной задаче мы получили тот же самый ответ, что и в первом случае. Теперь, чтобы найти результат, полученный во втором эксперименте, нужно “наложить” друг на друга два уже рассмотренных случая. При этом ответ получится снова  $\sqrt{3}R$ . Пояснить это можно следующим образом.

Пусть, для определенности, к контактам прикладывают напряжение  $U_0$ .

Если смотреть на решётку “издали” (не различая отдельные ячейки), то она будет похожа на некую сплошную пластину. Направим ось  $x$  по отрезку  $AD$ , а ось  $y$  по  $AB$ . Вдоль этих осей наша пластина однородна. Следовательно, при подключении напряжения  $U_0$  между контактами  $AB$  и  $CD$  (как в первом случае), напряжение будет меняться линейно вдоль координаты

$x$ . То есть можно написать, что

$$U_1(x) = U_0 x/L \quad (6)$$

Под  $U(x)$  здесь подразумевается напряжение между контактом  $AB$  и точками схемы на вертикальной линии с горизонтальной координатой  $x$ .

Если же напряжение  $U_0$  приложить к контактам  $AD$  и  $BC$  (как во вспомогательной задаче), то напряжение будет меняться линейно вдоль оси  $y$ :

$$U_{1*} = U_0 y/L. \quad (7)$$

При этом, в обоих случаях, через квадрат будут течь одинаковые по величине токи  $I_0 = U_0/R_0$ . В первом случае ток будет течь по горизонтали, во втором — по вертикали.

Полученные выражения для напряжений и токов можно продолжить на всю решётку. Если теперь воспользоваться принципом суперпозиции и рассмотреть ситуацию, когда напряжения приложены и в вертикальном и в горизонтальном направлениях одновременно, то на прямой  $x + y = 0$  получится  $U(x + y = 0) = 0$ , а на прямой  $x + y = \sqrt{2}L$  будет  $U(x + y = \sqrt{2}L) = U_0(x + y)/L = \sqrt{2}U_0$  (напряжения являются величинами скалярными, поэтому их нужно просто сложить). Расстояние между такими прямыми в точности равно  $L$  и можно считать, что отрезки  $A'B'$  и  $C'D'$  располагаются на этих прямых (естественно, здесь подразумевается, что квадрат  $ABCD$  не вырезан, и мы имеем сейчас дело с целой сеткой).

Сложим теперь токи. В первом случае, как уже говорилось, ток  $I_0$  будет течь вдоль оси  $x$ , а во втором случае — вдоль оси  $y$ . Токи — величины векторные, они имеют не только абсолютную величину, но и направление, поэтому при наложении суммарный ток будет равен  $\sqrt{2}I_0$  и будет течь под углом  $45^\circ$ .

У нас получилось, то же самое, как если бы к контактам  $A'B'$  и  $C'D'$  приложили напряжение  $\sqrt{2}U_0$  и получили ток  $\sqrt{2}I_0$ . Это значит, что в этом случае, как и раньше, сопротивление квадрата будет равно  $\sqrt{3}R$ .

Ответ: В обоих случаях получили сопротивление  $\sqrt{3}R$ .

### Задача 5.

Рассмотрим некоторое произвольное положение бусинок на кольцах (см. Рис. 5). Пронумеруем бусинки и обозначим углы так, как это сделано на рисунке.

Легко, заметить, что углы  $\alpha$  и  $\beta$  в любой момент времени связаны достаточно простым соотношением. Действительно, из теоремы синусов для треугольника на Рис. 5 имеем:

$$\frac{R}{\sin \alpha} = \frac{2R}{\sin \beta},$$

а значит,

$$\sin \beta = 2 \sin \alpha. \quad (8)$$

Согласно закону Всемирного тяготения, бусинки притягиваются друг к другу с равными по величине силами  $F$ . Поскольку бусинки могут двигаться только по кольцам, будем рассматривать проекции сил на касательные к кольцам (за положительное направление выберем движение против часовой стрелки). По второму закону Ньютона, за малый интервал времени  $\Delta t$  импульс бусинки №1 изменится на величину

$$\Delta p_1 = -F \sin \alpha \Delta t. \quad (9)$$

С другой стороны, импульс бусинки №2 изменится на величину

$$\Delta p_2 = F \sin \beta \Delta t. \quad (10)$$

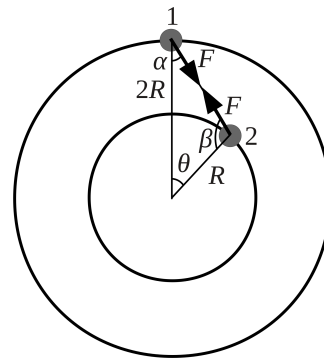


Рис. 5:

Удваивая уравнение (9) и прибавляя к нему уравнение (10) с учетом (8), получаем

$$2\Delta p_1 + \Delta p_2 = F(-2 \sin \alpha + \sin \beta)\Delta t = 0$$

Таким образом, величина  $2p_1 + p_2$  в ходе движения не изменяется, а ее значение несложно определить из начальных данных:

$$2mv_1 + mv_2 = 2mv_0 \Leftrightarrow 2v_1 + v_2 = 2v_0. \quad (11)$$

Таким образом, мы нашли связь между скоростями бусинок. Данное выражение можно было получить сразу, применив закон сохранения углового момента.

Из Рис. 5 также видно, что расстояние между бусинками определяется выражением

$$l(\theta) = \sqrt{4R^2 + R^2 - 4R^2 \cos \theta} = R\sqrt{5 - 4 \cos \theta}. \quad (12)$$

Выпишем теперь закон сохранения энергии:

$$\frac{mv_0^2}{2} - \frac{Gm^2}{R} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} - \frac{Gm^2}{l(\theta)}.$$

Перепишем последнее равенство в следующем виде:

$$v_1^2 + v_2^2 + U(\theta) = v_0^2, \quad (13)$$

где введено обозначение

$$U(\theta) = \frac{2Gm}{R} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{5 - 4 \cos \theta}} \right).$$

Схематический график данной функции приведен на рисунках 6. Эта функция обращается в ноль в точках 0 и  $2\pi$  (это одна и та же точка, соответствующая ситуации, когда бусинки находятся на одном радиусе) и имеет максимум в точке  $\pi$  (когда бусинки максимально удалены друг от друга). Максимум функции обозначим через  $U_m$ . Он равен

$$U_m = U(\pi) = \frac{4Gm}{3R}. \quad (14)$$

Сразу можно заметить, что максимальная скорость первой бусинки равна  $v_0$ . Остается разобраться с минимальной скоростью.

Для этого выразим из (11) скорость  $v_2$  и подставим в закон сохранения энергии (13). В результате получим следующее квадратное уравнение:

$$5v_1^2 - 8v_0v_1 + (3v_0^2 + U(\theta)) = 0. \quad (15)$$

Корни этого квадратного уравнения имеют вид:

$$v_1^+(\theta) = \frac{4v_0 + \sqrt{v_0^2 - 5U(\theta)}}{5}, \quad (16)$$

$$v_1^-(\theta) = \frac{4v_0 - \sqrt{v_0^2 - 5U(\theta)}}{5} \quad (17)$$

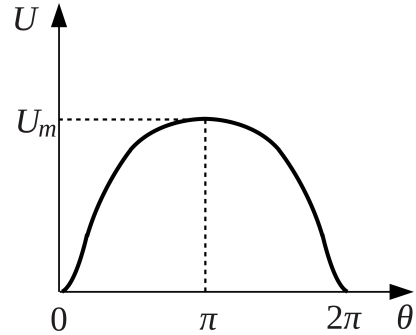


Рис. 6:

Поведение  $v_1^+(\theta)$  и  $v_1^-(\theta)$  в зависимости от  $\theta$  схематично изображено на Рис. 7 (корни  $2\pi$ -периодичны). На Рис. 7А рассмотрен случай, когда дискриминант в выражениях (16), (17) всегда неотрицателен. Эта ситуация реализуется, если выполнено условие

$$v_0^2 \geq 5U(\theta). \quad (18)$$

В этом случае корни уравнения (15) существуют при любом значении угла  $\theta$  и никогда не пересекаются. Отсюда можно сразу сделать вывод о минимальной возможной скорости бусинки под номером 1. Действительно, поскольку скорости бусинок должны меняться непрерывно и не могут испытывать скачков, а в начальный момент скорость первой бусинки равняется  $v_0$ , заключаем, что возможные значения скорости  $v_1$  описываются величиной  $v_1^+(\theta)$ . Следовательно, минимальная скорость первой бусинки в данном случае равна минимальному значению  $v_1^+(\pi)$ , то есть реализуется, когда бусинки находятся на максимальном расстоянии друг от друга. Таким образом, минимальная скорость равна

$$v_{1,\min} = \frac{4v_0 + \sqrt{v_0^2 - 5U_m}}{5}. \quad (19)$$

При выполнении условия (19), обе бусинки вращаются, но бусинка 1 все время обгоняет бусинку 2. Предельному случаю, когда неравенство (18) обращается в точное равенство, соответствует ситуация, когда бусинки за бесконечно большое время расходятся на диаметрально противоположные положения. Этот вариант развития событий чем-то похож на то, что произойдет с математическим маятником на жестком стержне длиной  $l$ , если ему в положении равновесия сообщить скорость  $2\sqrt{gl}$ .

Рассмотрим теперь ситуацию, изображенную на Рис. 7Б. Ей соответствует неравенство, обратное к (18). В данном случае, дискриминант в выражениях (16), (17) обращается в ноль при некотором критическом угле  $\theta_m < \pi$ . Корни уравнения (15) существуют только при  $\theta \leq \theta_m$  и совпадают при  $\theta = \theta_m$ .

Аккуратно проанализируем полученные результаты. В начальный момент времени скорость  $v_1$  равна  $v_0$ . Бусинки начинают свое вращение. Скорость  $v_1$  начинает уменьшаться согласно  $v_1^+(\theta)$ . Так происходит до тех пор, пока угол не достигнет значения  $\theta = \theta_m$ . Далее угол  $\theta$  увеличиваться не может. Следовательно, он начнет уменьшаться (гравитационное притяжение начнет сближать бусинки). Возникает вопрос, как дальше будет меняться скорость  $v_1$ : будет ли она увеличиваться с уменьшением угла  $\theta$  согласно  $v_1^+(\theta)$  (то есть пойдет назад) или будет продолжать уменьшаться, но теперь уже по закону  $v_1^-(\theta)$ . Ответить на этот вопрос помогает Рис. 8. На нем изображены

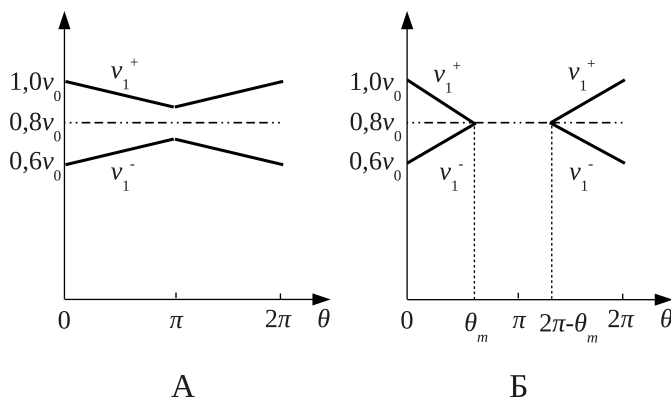


Рис. 7:

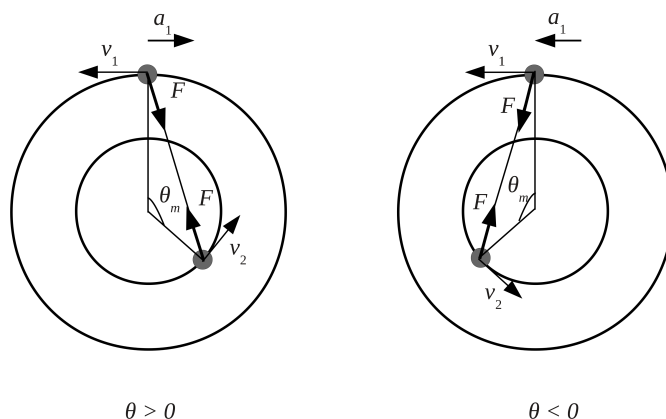


Рис. 8:

бусинки, раздвинутые на угол  $|\theta_m|$ . Из этого рисунка ясно, что если бусинка 1 опережает бусинку 2, то есть  $\theta = |\theta_m| > 0$ , гравитационная сила продолжит тормозить бусинку 1 (тангенциальное ускорение направлено против движения). Таким образом, скорость бусинки после достижения критического угла продолжит уменьшаться согласно  $v_1^-(\theta)$ . Следовательно, минимальное значение скорости  $v_1$  в данном случае равно  $v_{1,\min} = v_1^-(0) = 0,6v_0$ .

Разобраться с дальнейшим поведением системы теперь не составляет труда. Бусинка 1 тормозит, бусинка 2 продолжает разгоняться. В некоторый момент они поравняются, угол  $\theta$  обратится в ноль. Далее бусинка 2 вырвется вперед, угол  $\theta$  станет отрицательным. Скорость бусинки 1 начнет увеличиваться с ростом абсолютной величины  $\theta$  (по закону  $v_1^-(\theta)$ ). Так будет продолжаться до тех пор, пока угол не станет равен  $\theta = -|\theta_m| < 0$ . После этого бусинки вновь начнут сближаться и, как видно из Рис. 8, бусинка 1 продолжит разгоняться, следовательно, ее скорость начнет увеличиваться по закону  $v_1^+(\theta)$ . Так будет продолжаться пока система не вернется в начальное состояние. Далее цикл будет повторяться. Таким образом, при выполнении условия, обратного к (19), обе бусинки вращаются, поочередно обгоняя друг друга.

Собрав все полученные результаты вместе, можно подвести конечный результат.

- Если масса бусинок удовлетворяет условию

$$m \leq \frac{3Rv_0^2}{20G}, \quad (20)$$

то скорость бусинки под номером 1 изменяется в пределах

$$v_1 \in \left[ \frac{4v_0 + \sqrt{v_0^2 - 5U_m}}{5}, v_0 \right]. \quad (21)$$

- В противном случае скорость изменяется в пределах

$$v_1 \in [0,6v_0, v_0]. \quad (22)$$

Ответ: Ответ приведен в уравнениях (20)–(22). Скорость второй бусинки определяется соотношением (11).