Районный тур 2013. 9 класс. I вариант

Задача 1.

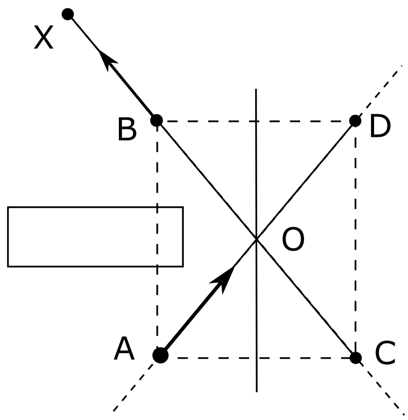

Рис. 1:

Для решения этой задачи необходимо заметить что волк (A) и заяц (B) будут двигаться прямолинейно. Чтобы это понять, построим их изображения в зеркале - C и D. В начальный момент времени волк и заяц будут двигаться вдоль прямых AD и BC соответственно: волк - из точки A в сторону зеркала, а заяц - из B от зеркала. Это значит, что их изображения так же будут двигаться вдоль этих прямых: изображение волка - по прямой BC из C в сторону зеркала, а изображение зайца - по AD из D от зеркала. Но в этом случае скорости волка и зайца не будут меняться по направлению. Это и значит, что они двигаются вдоль прямых.

Волк уткнется в зеркало в точке O. Перед этим он пробежит расстояние AO. По теореме Пифагора:

$$AO = \sqrt{h^2 + \frac{L^2}{4}}.$$

<u>Ответ:</u> Волк успеет пробежать расстояние $\sqrt{h^2 + L^2/4}$.

Задача 2.

Мощность нагревательного прибора можно рассчитать по известной формуле: $P = IU$, где I – ток, который течет через нагреватель, а U - приложенное к нему напряжение. По закону Ома ток через нагреватель связан с напряжением так: $I = U/R_0$, где R_0 – сопротивление схемы нагревателя. Подставим ток из закона Ома в выражение для мощности:

$$P = \frac{U^2}{R_0},$$

Очевидно, что мощность прибора будет максимальной, когда максимально обратное сопротивление $1/R_0$ схемы нагревателя.

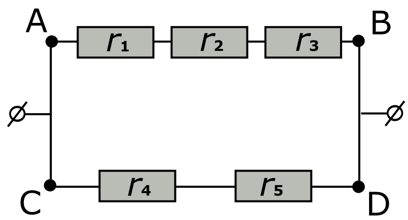

Рис. 2:

Остается понять, как нужно расставить имеющиеся сопротивления в схеме, чтобы получить максимальное значение $1/R_0$. Обозначим сопротивления элементов, занимающих соответствующие позиции, через $r_{1,2...}$ (см. рис. 2). Сопротивления r_1, r_2 и r_3 соединены друг с другом последовательно, поэтому сопротивление участка AB равно $r_{AB} = r_1 + r_2 + r_3$. Сопротивления r_4 и r_5 так же соединены последовательно, тогда для участка CD получаем сопротивление $r_{CD} = r_4 + r_5$. Участки цепи AB и CD соединены параллельно, таким образом для полного сопротивления сопротивления цепи верно следующее:

$$\frac{1}{R_0} = \frac{1}{r_1 + r_2 + r_3} + \frac{1}{r_4 + r_5}. \tag{1}$$

Осталось найти какое расположение сопротивлений обеспечивает максимальное значение обратимого сопротивления. Заметим, что перестановка резисторов r_1, r_2 и r_3 на участке AB не влияет на ответ, так же как и перестановка r_4 и r_5 на участке CD. Ответ можно найти при помощи перебора возможных вариантов, или получить алгебраически, для этого приведем к общему знаменателю выражение (1):

$$\frac{1}{R_0} = \frac{r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5}{(r_1 + r_2 + r_3)(r_4 + r_5)}. \tag{2}$$

Заметим, что

$$r_1 + r_2 + r_3 = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 - (r_4 + r_5),$$

а $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 = 12$ Ом по условию задачи. Тогда если мы введем обозначение $X = r_4 + r_5$, то выражение (2) примет вид:

$$\frac{1}{R_0} = \frac{12 \text{ Ом}}{(12 \text{ Ом} - X)X}. \tag{3}$$

Понятно, что максимальное значение $1/R_0$ соответствует минимальному значению знаменателя $(12 - X)X$ из (3). Раскрывая скобки видим, что знаменатель, как функция X - это парабола с направленными вниз ветвями $12X - X^2$. Свой максимум эта парабола достигает в точке $X_0 = 12/2$. Ясно, что минимальное значение знаменателя в нашем случае будет для $X = r_4 + r_5$ наиболее отстоящего от X_0. Не сложно видеть, что это достигается когда сопротивления r_4 и r_5 равны 1 Ом.

Ответ: Для максимальной мощности на участке AB должны стоять сопротивления в 2 Ом, 3 Ом и 5 Ом, а оба сопротивления на участке CD - равны 1 Ом.

Задача 3.

Для начала рассмотрим ситуацию, когда ящики находились в равновесии. В этом случае действующие на правый блок силы должны компенсировать друг друга. Поэтому сила натяжения нижней нити в 2 раза больше силы натяжения нити верхней(T).

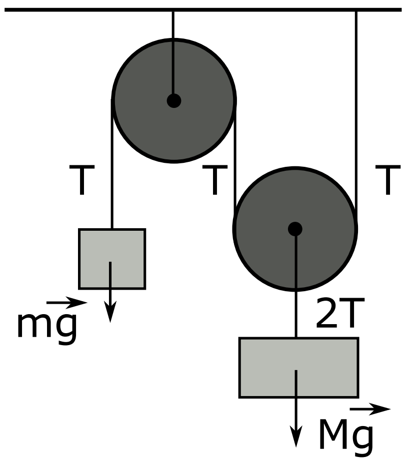

Рис. 3:

Теперь найдем массу m. Поскольку изначально ящики были уравновешены, то,

$$T = mg;$$

$$2T = Mg.$$

Откуда мы получаем, что $m = M/2$.

Если правый груз опускается вниз на расстояние h, то левый груз должен подняться на высоту $2h$, т.к. нить, к которой привязан левый груз, нерастяжима. Отсюда мы получаем, что если ускорение правого груза составляет a, то ускорение левого груза составляет $2a$. То есть ускорение у левого груза всегда в 2 раза меньше чем у правого.

Будем считать, что к моменту, когда Вася отпустил груз из левого ящика успело высыпаться Δm песка. Пусть в это время ускорение правого ящика равнялось a. Тогда, Второй закон Ньютона для грузов в этот момент дает:

$$\begin{cases} (m - \Delta m)(2a) = T - (m - \Delta m)g \\ Ma = Mg - 2T \end{cases}$$

По условию Вася выпустил груз, когда ускорение левого ящика равнялось $g/2$, следовательно ускорение правого груза тогда было равно $a = g/4$. Второй закон Ньютона, тогда, дает:

$$\begin{cases} (m - \Delta m)(g/2) = T - (m - \Delta m)g \\ Mg/4 = Mg - 2T \end{cases}$$

Из этой системы получается, что $(m - \Delta m) = M/4$. Учитывая, что $m = M/2$, получаем $\Delta m = M/4$. Подставляя числа получаем $\Delta m = 25$кг.

Теперь можно найти сколько времени Вася удерживал ящик:

$$t = \frac{25\text{кг}}{50\text{г/с}} = 500c = 8 \text{ мин } 20 \text{ с}$$

Ответ: Вася удерживал груз 8 мин 20 с

Задача 4.

Рассмотрим ситуацию, когда мы добавляем пельмешки уже после того, как вода в первый раз закипела. Ясно, что при добавлении очередной охлажденной пельмешки в кипящую кастрюлю, система быстро приходит к тепловому равновесию и кипение прекращается. Обозначим за Δt время, кипения воды в промежутке между закидыванием пельмешек. Понятно, что для восстановления кипения после добавления новой пельмешки требуется время равное $\tau - \Delta t$. В течении этого процесса начальная и конечная температуры всего содержимого кастрюли, кроме новой пельмешки, одинаковые ($T_k = 100^0 C$). Значит, можно считать что вся теплота, переданная за это время плиткой пошла на разогрев новой пельмешки до температуры кипения воды. Тогда уравнение теплового баланса будет иметь вид:

$$C_\Pi(T_k - T_\Pi) = P(\tau - \Delta t),$$

Так как ответ не зависит от количества пельменей в кастрюле, то понятно, что если хоть раз вода закипела, то она будет вскипать после добавления всех последующих пельменей. Из полученного уравнения можно выразить Δt:

$$\Delta t = \frac{1}{P}\Big(P\tau - C_\Pi(T_k - T_\Pi)\Big). \tag{4}$$

Обозначим время кипения после первого закипания кастрюли за Δt_1. Если вода всего в процессе закипала n_k раз, то в наших обозначениях общее время кипения (t_k) запишется так:

$$t_k = \Delta t_1 + (n_k - 1)\Delta t.$$

Понятно, что $\Delta t_1 \leq \Delta t$, потому что часть теплоты, переданная плиткой могла уйти на разогрев до T_k не только новой пельмешки, но и остальных ингредиентов кастрюли. Тогда можно выразить количество закипаний так:

$$n_k = \text{целая часть}\left[\frac{t_k}{\Delta t}\right] + 1. \tag{5}$$

По условию задачи до момента опускания последней пельмешки прошло время равное $t = (N-1)\tau$. Тогда обозначим общую теплоту, потраченную на кипение воды с начала процесса Q_Λ. К моменту опускания последней пельмешки вся вода была нагрета до T_k (та часть, которая испарилась при кипении так же была сначала нагрета до T_k), на это ушла теплота $Q_B = C_B(T_k - T_B)$. Кроме того $N-1$ пельменей тоже оказались нагреты до T_k, на что ушла теплота $Q_\Pi = (N-1)C_\Pi(T_k - T_\Pi)$ Тогда уравнение теплового баланса для всего процесса запишется как:

$$Q_B + Q_\Pi + Q_\Lambda = Pt. \tag{6}$$

Так как температура системы при кипении воды не меняется, то вся теплота от плитки при этом идет на кипение воды:

$$Q_\Lambda = Pt_k.$$

Подставляя в (6) выражения для теплот получаем:

$$c_B M_B(T_k - T_B) + (N-1)C_\Pi(T_k - T_\Pi) + Pt_k = P(N-1)\tau. \tag{7}$$

Остается выразить t_k. После не сложных упрощений получаем что общее время кипения воды:

$$t_k = \frac{1}{P}\Big((N-1)(P\tau - C_\Pi(T_k - T_\Pi)) - c_B M_B(T_k - T_B)\Big). \tag{8}$$

Для того чтобы найти n_k по формуле (5) рассчитаем отношение $t_k/\Delta t$ используя выражения (8) и (4):

$$\frac{t_k}{\Delta t} = N - 1 - \frac{c_B M_B(T_k - T_B)}{P\tau - C_\Pi(T_k - T_\Pi)}. \tag{9}$$

И теперь сопоставляя (5) и (9) получаем ответ:

$$n_k = N - 1 - \text{целая часть}\left[\frac{c_B M_B(T_k - T_B)}{P\tau - C_\Pi(T_k - T_\Pi)}\right]. \tag{10}$$

Стоит отметить, что мощности плитки может не хватить для того чтобы кастрюля хоть раз вскипела. Эту минимальную мощность можно получить из соотношении (7) положив в нем $t_k = 0$. Таким образом мы получаем, что кастрюля ни разу не вскипит если выполнено следующее неравенство:

$$P \leq \frac{C_\Pi}{\tau}(T_k - T_\Pi) + \frac{c_B M_B(T_k - T_B)}{(N-1)\tau}.$$

<u>Ответ:</u> Всего с начала процесса и до опускания последней пельмешки вода будет кипеть в течении времени $t_k = \frac{1}{P}\Big((N-1)(P\tau - C_\Pi(T_k - T_\Pi)) - c_B M_B(T_k - T_B)\Big)$. При этом она будет закипать $n_k = \Big(N - 1 - \text{целая часть}\left[\frac{c_B M_B(T_k - T_B)}{P\tau - C_\Pi(T_k - T_\Pi)}\right]\Big)$ раз. Ни разу вода не вскипит при $P \leq \frac{C_\Pi}{\tau}(T_k - T_\Pi) + \frac{c_B M_B(T_k - T_B)}{(N-1)\tau}$.

Задача 5.

Тангенс угла, под которым летит мяч равен отношению вертикальной составляющей скорости к горизонтальной $\mathrm{tg}(\alpha) = v_\Gamma / v_B$. По условию задачи начальная вертикальная скорость v_B дана. Таким образом, чтобы найти тангенс (а затем и сам угол) в начальный момент времени достаточно найти начальную горизонтальную скорость v_Γ.

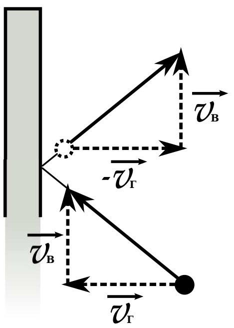

Рис. 4:

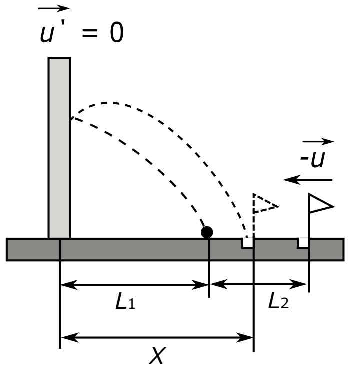

Рис. 5:

Перейдем в систему отсчета, двигающуюся с постоянной скоростью $\vec{u}$, в которой стенка неподвижна ($\vec{u'} = 0$). Тогда лунка будет двигаться к ней со скоростью $-\vec{u}$, а у мяча появится добавка к горизонтальной составляющей скорости в направлении к стенке $v'_\Gamma = v_\Gamma + u$. В этой системе отсчета мяч абсолютно упруго ударяется о неподвижную стенку. При таком ударе его скорость по вертикали не изменяется, а по горизонтали – меняет направление (см. рис. 5). Так как вертикальная составляющая скорости при столкновении со стенкой не изменилась, то мы можем посчитать полное время полета мячика до попадания в лунку, просто как для тела движущегося с ускорением свободного падения:

$$OY\colon 0 = v_B t_k - \frac{g}{2} t_k^2,$$

откуда не сложно выразить время:

$$t_k = \frac{2v_B}{g}. \tag{11}$$

В нашей системе отчета по горизонтали мячик двигается равномерно и проходит сначала расстояние L_1 до стенки с постоянной горизонтальной скоростью v'_Γ. После удара, он летит в обратном направлении с горизонтальной скоростью по модулю равной так же v'_Γ, и проходит расстояние до лунки X (см. рис. 5). Тогда за время своего полета t_k мячик попадет в лунку если выполнено:

$$L_1 + X = v'_\Gamma t_k. \tag{12}$$

В рассматриваемой системе отсчета стенка покоится, а лунка двигается с постоянной скоростью u к ней навстречу. Изначально расстояние между ними равно $L_1 + L_2$, не сложно видеть, что за время полета мячика лунка сместилась на расстояние $L_1 + L_2 - X$ (см. рис. 4). Тогда из уравнения равномерного движения для лунки можно выразить X:

$$L_1 + L_2 - X = ut_k, \tag{13}$$

$$X = L_1 + L_2 - ut_k.$$

Подставим полученное для X выражение в (12):

$$L_1 + L_1 + L_2 - ut_k = v'_\Gamma t_k. \tag{14}$$

Вспомним, как связаны горизонтальные составляющие скорости мячика в движущейся и неподвижной системах отчета: $v'_\Gamma = v_\Gamma + u$. Подставим это соотношение, а так же найденное время t_k (11) в (14):

$$2L_1 + L_2 - u\frac{2v_B}{g} = (v_\Gamma + u)\frac{2v_B}{g},$$

откуда при помощи не сложных преобразований получаем выражение:

$$v_\Gamma = \frac{g}{2v_B}(2L_1 + L_2) - 2u. \tag{15}$$

Теперь можно получить тангенс искомого угла α:

$$\mathrm{tg}(\alpha) = \frac{v_B}{\frac{g}{2v_B}(2L_1 + L_2) - 2u}.$$

Тогда искомый угол выражается так:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{2v_B^2}{g(2L_1 + L_2) - 4uv_B)}\right)$$

Ответ: Чтобы мячик попал в лунку отскочив от стенки и не коснувшись земли, Илья должен запустить его под углом $\alpha = \arctan\left(\frac{2v_B^2}{g(2L_1+L_2)-4uv_B)}\right)$.

Районный тур 2013. 9 класс. II вариант

Задача 1.

Для решения этой задачи необходимо заметить что волк (A) и заяц (B) будут двигаться прямолинейно. Чтобы это понять, построим их изображения в зеркале - C и D. В начальный момент времени волк и заяц будут двигаться вдоль прямых AD и BC соответственно: волк - из точки A в сторону зеркала, а заяц - из B от зеркала. Это значит, что их изображения так же будут двигаться вдоль этих прямых: изображение волка - по прямой BC из C в сторону зеркала, а изображение зайца - по AD из D от зеркала. Но в этом случае скорости волка и зайца не будут меняться по направлению. Это и значит, что они двигаются вдоль прямых.

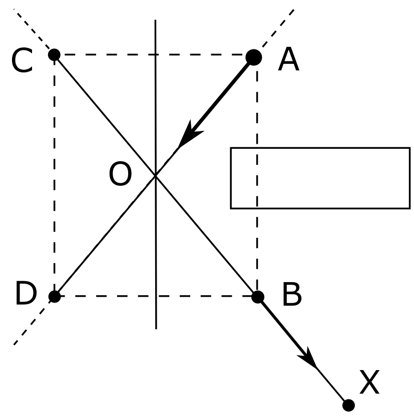

Рис. 1:

Волк уткнется в зеркало в точке O. Перед этим он пробежит расстояние AO, по теореме Пифагора:

$$AO = \sqrt{h^2 + \frac{L^2}{4}}.$$

Время, прошедшее до этого момента, равно $t = AO/v_w = \left(\sqrt{h^2 + L^2/4}\right)/v_w$. Заяц за это время успеет пробежать расстояние $BX = v_h\, t = v_h/v_w\sqrt{h^2 + L^2/4}$, где X - это положение зайца на прямой BC, в тот момент, когда волк уткнется в зеркало. А расстояние от зайца до точки O в этот момент будет равно $OX = OB + BX = (1 + v_h/v_w)\sqrt{h^2 + L^2/4}$.

Ответ: Расстояние между волком и зайцем будет $(1 + v_h/v_w)\sqrt{h^2 + L^2/4}$.

Задача 2.

Мощность нагревательного прибора можно рассчитать по известной формуле: $P = IU$, где I – ток, который течет через нагреватель, а U - приложенное к нему напряжение. По закону Ома ток через нагреватель связан с напряжением так: $I = U/R_0$, где R_0 – сопротивление схемы нагревателя. Подставим ток из закона Ома в выражение для мощности:

$$P = \frac{U^2}{R_0},$$

Очевидно, что мощность прибора будет максимальной, когда максимально обратное сопротивление $1/R_0$ схемы нагревателя.

Остается понять, как нужно расставить имеющиеся сопротивления в схеме, чтобы получить максимальное значение $1/R_0$. Обозначим сопротивления элементов, занимающих соответствующие позиции, через $r_{1,2...}$ (см. рис. 2). Сопротивления r_1, r_2 и r_3 соединены друг с другом последовательно, поэтому сопротивление участка AB равно $r_{AB} = r_1 + r_2 + r_3$. Сопротивления r_4 и r_5 так же соединены последовательно, тогда для участка CD получаем сопротивление $r_{CD} = r_4 + r_5$. Участки цепи AB и CD соединены параллельно, таким образом для полного сопротивления сопротивления цепи верно следующее:

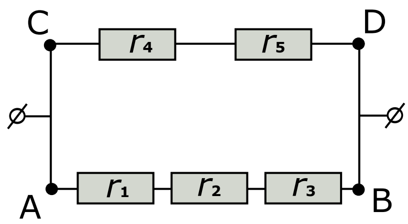

Рис. 2:

$$\frac{1}{R_0} = \frac{1}{r_1 + r_2 + r_3} + \frac{1}{r_4 + r_5}. \tag{16}$$

Осталось найти, какое расположение сопротивлений обеспечивает максимальное значение обратимого сопротивления. Заметим, что перестановка резисторов r_1, r_2 и r_3 на участке AB не влияет на ответ, так же как и перестановка r_4 и r_5 на участке CD. Ответ можно найти при помощи перебора возможных вариантов или получить алгебраически, для этого приведем к общему знаменателю выражение (16):

$$\frac{1}{R_0} = \frac{r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5}{(r_1 + r_2 + r_3)(r_4 + r_5)}. \tag{17}$$

Заметим, что

$$r_1 + r_2 + r_3 = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 - (r_4 + r_5),$$

а $r_1+r_2+r_3+r_4+r_5=17$ Ом по условию задачи. Тогда если мы введем обозначение $X=r_4+r_5$, то выражение (17) примет вид:

$$\frac{1}{R_0}=\frac{17\text{ Ом}}{(17\text{ Ом}-X)X}. \tag{18}$$

Понятно, что максимальное значение $1/R_0$ соответствует минимальному значению знаменателя $(17\text{ Ом}-X)X$ из (18). Раскрывая скобки видим, что знаменатель, как функция X - это парабола с направленными вниз ветвями $17X-X^2$. Свой максимум эта парабола достигает в точке $X_0=17/2$ Ом. Ясно, что минимальное значение знаменателя в нашем случае будет для $X=r_4+r_5$ наиболее отстоящего от X_0. Не сложно видеть, что это достигается когда одно из сопротивлений r_4 и r_5 равно 1 Ом, а второй 2 Ом.

Ответ: Для максимальной мощности на участке AB должны стоять сопротивления в 2 Ом, 5 Ом и 7 Ом, а на участке CD - сопротивления 1 Ом и 2 Ом.

Задача 3.

Для начала рассмотрим ситуацию, когда ящики находились в равновесии. В этом случае действующие на левый блок силы должны компенсировать друг друга. Поэтому сила натяжения нижней нити в 2 раза больше силы натяжения нити верхней(T).

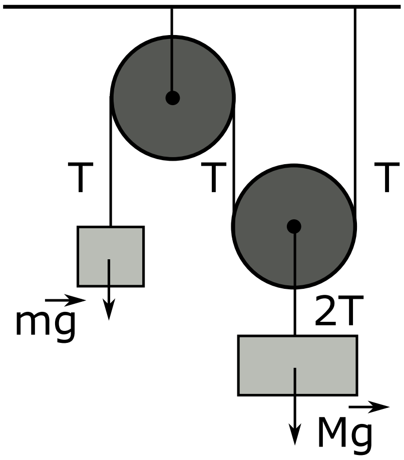

Рис. 3:

Теперь найдем массу m. Поскольку изначально ящики были уравновешены, то,

$$T=mg;$$

$$2T=Mg.$$

Откуда мы получаем, что $m=M/2$.

Если левый груз опускается вниз на расстояние h, то правый груз должен подняться на высоту $2h$, т.к. нить, к которой привязан правый груз, нерастяжима. Отсюда мы получаем, что если ускорение левого груза составляет a, то ускорение правого груза составляет $2a$. То есть ускорение правого груза всегда в 2 раза меньше чем левого.

Будем считать, что к моменту, когда Вася отпустил груз из правого ящика успело высыпаться Δm песка. Пусть в это время ускорение левого ящика равнялось a. Тогда, Второй закон Ньютона для грузов в этот момент дает:

$$\begin{cases} (m-\Delta m)(2a)=T-(m-\Delta m)g \\ Ma=Mg-2T \end{cases}$$

По условию Вася выпустил груз, когда ускорение правого ящика равнялось $g/2$, следовательно ускорение правого груза тогда было равно $a=g/4$. Второй закон Ньютона, в этот момент дает:

$$\begin{cases} (m-\Delta m)(g/2)=T-(m-\Delta m)g \\ Mg/4=Mg-2T \end{cases}$$

Из этой системы получается, что $(m-\Delta m)=M/4$. Учитывая, что $m=M/2$, получаем $\Delta m=M/4$. Подставляя числа получаем $\Delta m=30$кг.

Теперь можно найти сколько времени Вася удерживал ящик:

$$t=\frac{30\text{кг}}{125\text{г/с}}=240c=4\text{ мин}$$

Ответ: Вася удерживал груз 4 мин

Задача 4.

Рассмотрим ситуацию, когда мы добавляем пельмешки уже после того, как вода в первый раз закипела. Ясно, что при добавлении очередной охлажденной пельмешки в кипящую кастрюлю, система быстро приходит к тепловому равновесию и кипение прекращается. Обозначим за Δt время, кипения воды в промежутке между закидыванием пельмешек. Понятно, что для восстановления кипения после добавления новой пельмешки требуется время равное $\tau-\Delta t$. В течении этого процесса начальная и конечная температуры всего содержимого кастрюли, кроме новой пельмешки, одинаковые ($T_k=100^0C$). Значит, можно считать что вся теплота, переданная за это время плиткой пошла на разогрев новой пельмешки до температуры кипения воды. Тогда уравнение теплового баланса будет иметь вид:

$$c_\Pi m_\Pi (T_k - T_\Pi) = P(\tau - \Delta t),$$

Так как ответ не зависит от количества пельменей в кастрюле, то понятно, что если хоть раз вода закипела, то она будет вскипать после добавления всех последующих пельменей. Из полученного уравнения можно выразить Δt:

$$\Delta t = \frac{1}{P}\Big(P\tau - c_\Pi m_\Pi (T_k - T_\Pi)\Big). \tag{19}$$

Обозначим время кипения после первого закипания кастрюли за Δt_1. Если вода всего в процессе закипала n_k раз, то в наших обозначениях общее время кипения (t_k) запишется так:

$$t_k = \Delta t_1 + (n_k - 1)\Delta t.$$

Понятно, что $\Delta t_1 \leq \Delta t$, потому что часть теплоты, переданная плиткой могла уйти на разогрев до T_k не только новой пельмешки, но и остальных ингредиентов кастрюли. Тогда можно выразить количество закипаний так:

$$n_k = \text{целая часть}\left[\frac{t_k}{\Delta t}\right] + 1. \tag{20}$$

По условию задачи до момента опускания последней пельмешки прошло время равное $t = (N-1)\tau$. Тогда обозначим общую теплоту, потраченную на кипение воды с начала процесса Q_Λ. К моменту опускания последней пельмешки вся вода была нагрета до T_k (та часть, которая испарилась при кипении так же была сначала нагрета до T_k), на это ушла теплота $Q_B = C_B(T_k - T_B)$. Кроме того $N-1$ пельменей тоже оказались нагреты до T_k, на что ушла теплота $Q_\Pi = (N-1)c_\Pi m_\Pi (T_k - T_\Pi)$ Тогда уравнение теплового баланса для всего процесса запишется как:

$$Q_B + Q_\Pi + Q_\Lambda = Pt. \tag{21}$$

Так как температура системы при кипении воды не меняется, то вся теплота от плитки при этом идет на кипение воды:

$$Q_\Lambda = Pt_k.$$

Подставляя в (21) выражения для теплот получаем:

$$C_B(T_k - T_B) + (N-1)c_\Pi m_\Pi (T_k - T_\Pi) + Pt_k = P(N-1)\tau. \tag{22}$$

Остается выразить t_k. После не сложных упрощений получаем что общее время кипения воды:

$$t_k = \frac{1}{P}\Big((N-1)(P\tau - c_\Pi m_\Pi (T_k - T_\Pi)) - C_B(T_k - T_B)\Big). \tag{23}$$

Для того чтобы найти n_k по формуле (20) рассчитаем отношение $t_k/\Delta t$ используя выражения (23) и (19):

$$\frac{t_k}{\Delta t} = N - 1 - \frac{C_B(T_k - T_B)}{P\tau - c_\Pi m_\Pi (T_k - T_\Pi)}. \tag{24}$$

И теперь сопоставляя (20) и (24) получаем ответ:

$$n_k = N - 1 - \text{целая часть}\left[\frac{C_B(T_k - T_B)}{P\tau - c_\Pi m_\Pi (T_k - T_\Pi)}\right]. \tag{25}$$

Стоит отметить, что мощности плитки может не хватить для того чтобы кастрюля хоть раз вскипела. Эту минимальную мощность можно получить из соотношении (22) положив в нем $t_k = 0$. Таким образом мы получаем, что кастрюля ни разу не вскипит если выполнено следующее неравенство:

$$P \leq \frac{c_\Pi m_\Pi}{\tau}(T_k - T_\Pi) + \frac{C_B(T_k - T_B)}{(N-1)\tau}.$$

Ответ: Всего с начала процесса и до опускания последней пельмешки вода будет кипеть в течении времени $t_k = \frac{1}{P}\Big((N-1)(P\tau - c_\Pi m_\Pi (T_k - T_\Pi)) - C_B(T_k - T_B)\Big)$. При этом она будет закипать $n_k = \left(N - 1 - \text{целая часть}\left[\frac{C_B(T_k - T_B)}{P\tau - c_\Pi m_\Pi (T_k - T_\Pi)}\right]\right)$ раз. Ни разу вода не вскипит при $P \leq \frac{c_\Pi m_\Pi}{\tau}(T_k - T_\Pi) + \frac{C_B(T_k - T_B)}{(N-1)\tau}$.

Задача 5.

Тангенс угла, под которым летит мяч равен отношению вертикальной составляющей скорости к горизонтальной $\mathrm{tg}(\alpha) = v_\Gamma / v_B$. По условию задачи начальная вертикальная скорость v_B дана. Таким образом, чтобы найти тангенс (а затем и сам угол) в начальный момент времени достаточно найти начальную горизонтальную скорость v_Γ.

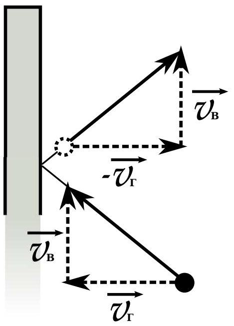

Рис. 4:

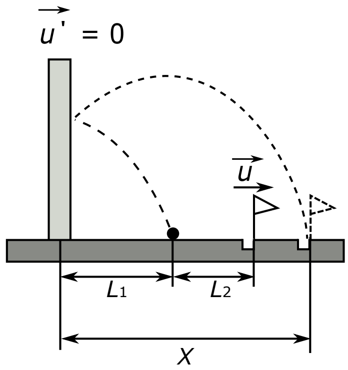

Рис. 5:

Перейдем в систему отсчета, двигающуюся с постоянной скоростью $\vec{u}$, в которой стенка неподвижна ($\vec{u'} = 0$). Тогда лунка будет двигаться от нее со скоростью $\vec{u}$, а у мяча появится добавка к горизонтальной составляющей скорости в направлении от стенки $v'_\Gamma = v_\Gamma - u$. В этой системе отсчета мяч абсолютно упруго ударяется о неподвижную стенку. При таком ударе его скорость по вертикали не изменяется, а по горизонтали - меняет направление (см. рис. 4). Так как вертикальная составляющая скорости при столкновении со стенкой не изменилась, то мы можем посчиать время полета мячика, просто как для тела движущегося с ускорением свободного падения:

$$OY\colon 0 = v_B t_k - \frac{g}{2} t_k^2, \tag{26}$$

откуда не сложно выразить время:

$$t_k = \frac{2v_B}{g}. \tag{27}$$

В нашей системе отчета по горизонтали мячик двигается равномерно и проходит сначала расстояние L_1 до неподвижной стенки стенки с постоянной горизонтальной скоростью v'_Γ. После удара, он летит в обратном направлении с горизрнтальной скоростью по модулю равной так же v'_Γ, и проходит расстояние до лунки X (см. рис. 5). Тогда за время своего полета t_k мячик попадет в лунку если выполнено:

$$L_1 + X = v'_\Gamma t_k. \tag{28}$$

В рассматриваемой системе отсчета стенка покоится, а лунка двигается с постоянной скоростью u от нее. Изначально растояние между ними равно $L_1 + L_2$, не сложно видеть, что за время полета мячика лунка сместилась на расстояние $X - (L_1 + L_2)$ (см. рис. 4). Тогда из уравнения равномерного движения для лунки можно выразить X:

$$X - (L_1 + L_2) = u t_k, \tag{29}$$

$$X = L_1 + L_2 + u t_k.$$

Подставим полученное для X выражение в (28):

$$L_1 + L_1 + L_2 + u t_k = v'_\Gamma t_k. \tag{30}$$

Вспомним, как связаны горизонтальные составляющие скорости мячика в движущейся и неподвижной системах отчета: $v'_\Gamma = v_\Gamma - u$. Подставим это соотношение, а так же найденное время t_k (27) в (30):

$$2L_1 + L_2 + u\frac{2v_B}{g} = (v_\Gamma - u)\frac{2v_B}{g},$$

откуда при помощи не сложных преобразований получаем выражение:

$$v_\Gamma = \frac{g}{2v_B}(2L_1 + L_2) + 2u. \tag{31}$$

Теперь можно получить тангенс искомого угла α:

$$\mathrm{tg}(\alpha) = \frac{v_B}{\frac{g}{2v_B}(2L_1 + L_2) + 2u}.$$

Тогда искомый угол выражается так:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{2v_B^2}{g(2L_1 + L_2) + 4uv_B)}\right)$$

Ответ: Чтобы мячик попал в лунку отскачив от стенки и не коснувшись земли, Илья должен запустить его под углом $\alpha = \arctan\left(\frac{2v_B^2}{g(2L_1+L_2)+4uv_B)}\right)$.